ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2023, том 59, № 2, с. 68–86

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рационирование и рынок: структура и устойчивость равновесий

Ф.Л. Зак,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: zak@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 15.12.2022

Аннотация. В последнее время в различных странах усиливается государственное регулирование экономики. Ряд государств пытается воздействовать на цены в ключевых областях экономики, в частности путем продажи ресурсов по твердым ценам в пределах установленных квот, однако в реальной экономике не удается предотвратить перепродажу квотируемых товаров на свободном рынке. Исследование воздействия рационирования на рыночные цены является актуальной и весьма сложной задачей. В настоящей статье предложена модель экономического равновесия, в которой часть товаров в пределах выделенных квот распределяется государством по фиксированным ценам, после чего все товары, включая выкупленные в пределах квот, поступают на свободный рынок, на котором обмениваются уже по рыночным ценам. Параметрами модели являются товарные запасы, начальные денежные средства участников, квоты и фиксированные цены. При определенных значениях параметров рассматриваемая модель в качестве частных случаев содержит модель чистого обмена и модель с фиксированными доходами и, в некотором смысле, является их комбинацией. Основываясь на известных свойствах этих частных случаев и используя технику элементарной дифференциальной топологии, мы исследуем условия существования и свойства состояний равновесия в рассматриваемой модели. Равновесие существует не для всех экономик. В зависимости от значений параметров в (достаточно общей) экономике может существовать конечное (четное или нечетное) число равновесий. В важном частном случае, когда квотируются все товары, а суммарная стоимость выделенных квот совпадает с совокупными денежными средствами участников, равновесия образуют одномерное многообразие. Исследована сходимость обобщенного вальрасовского процесса регулирования цен (tâtonnement). Показано, что в нашей ситуации достижение баланса спроса и предложения может сопровождаться ростом цен (эндогенной инфляцией).

Ключевые слова: дефицит, рационирование, квоты, функции спроса, рынок, равновесие, соответствие Вальраса, ценообразование, инфляция.

Классификация JEL: C02, C62, C65, D31, D45, D47, D52, D61.

Для цитирования: **Зак Ф.Л.** (2023). Рационирование и рынок: структура и устойчивость равновесий // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 68–86. DOI: 10.31857/S042473880025860-5

1. ВВЕДЕНИЕ

Сорок лет назад в своей знаменитой книге (Kornai, 1980) Я. Корнаи указал на *дефицит* как главную характеристику социалистической экономики. В одной из последних своих книг (Kornai, 2013) Корнаи охарактеризовал (современную) капиталистическую экономику как *экономику избытка*, подчеркивая тем самым противоположность двух экономических систем. Можно было бы ожидать, что с крахом социалистической системы такие понятия, как «дефицит», «рационирование» и «квоты», исчезнут из экономического лексикона. Однако ситуация развивалась по-другому и *конец истории* Ф. Фукуямы оказался иллюзией. Возрастающее во многих странах неравенство в доходах и человеческом капитале, массовая иммиграция, бедность, безработица, неуверенность в будущем, социальная и политическая поляризация привели к необходимости государственного регулирования, которое осуществлялось в разных странах по-разному (продовольственные карточки, субсидированное жилье для бедных, субсидии на образование, медицинскую помощь и транспорт). Показателем важности поисков новых форм государственного регулирования является растущая популярность концепции *универсального базисного дохода* (УБД), интенсивно обсуждающейся в последние десятилетия в ряде стран (см., например, (Torry, 2022)). Относительно успешные эксперименты с (ограниченным) введением УБД проводились и продолжают проводиться как в развитых, так и в развивающихся странах; в поддержку УБД выступают многие знаменитости (включая нобелевских лауреатов по экономике), а некоторые популярные политические партии в разных частях света сделали УБД частью своих программ (Merrill, Neves, Lain, 2022).

Однако несмотря на возрастающее число проблем, с которыми приходится сталкиваться правительствам западных стран, до недавнего времени понятия дефицита, рационирования и квот могли быть применены лишь к небольшой части экономик этих стран. Ситуация изменилась с нашествием коронавируса. Пандемия выявила неадекватность большинства систем здравоохранения, и эксперты до сих пор спорят о методах борьбы с эпидемией, использованных в большинстве развитых стран. Пандемия нанесла тяжелый урон как бизнесу, так и потребителям, выросла безработица, многие предприятия и офисы закрывались на карантин, нарушились логистические цепочки, международная торговля пришла в упадок. С целью смягчить эти проблемы богатые страны потратили триллионы «вертолетных» долларов на помощь бизнесу и прямые выплаты населению (что напоминает нам о *мягких бюджетных ограничениях* Корнаи). Все эти обстоятельства привели к нарушению поставок и дефициту, но говорить о сколько-нибудь широком распространении рационирования и квот оснований еще не было.

Ситуация усугубилась в 2022 г. с началом специальной военной операции на Украине и массивным введением санкций и ограничений. По словам главного экономиста ОЭСР А.С. Перейры (Hannon, 2022), ущерб глобальной экономике от военных действий на Украине оценивается в 2,8 трлн долл., и эта оценка непрерывно возрастает. Результатом этой череды потрясений (разумеется, в настоящее время мы можем рассматривать только промежуточный результат) явились частичная деглобализация, усиление тренда на деиндустриализацию ряда стран, непривычно высокий уровень инфляции, а также нехватка нефти, газа, бензина, электричества, минеральных удобрений, некоторых видов сельскохозяйственной продукции и многих других промышленных и потребительских товаров. В этих обстоятельствах, столкнувшись с общественным недовольством и опасаясь политических беспорядков, многие правительства ввели те или иные формы централизованного распределения и потолков цен (или субсидированных цен) на дефицитные продукты.

Детали принятых мер варьируются от страны к стране, но общим является вмешательство центра в распределение ресурсов и ценообразование. Согласно (Checherita-Westphal, Freier, Muggenthaler, 2022) две трети расходов Европейского союза, выделенных на преодоление последствий украинского кризиса, направлены на решение проблем, связанных с энергетикой, и почти треть этих средств расходуется на субсидии. В разных европейских странах на разных условиях, иногда в пределах определенных квот, субсидируются цены на бензин, различные виды топлива для отопления, электроэнергию. Кроме того, в ряде стран практикуется ограничение и регулирование цен на некоторые пищевые продукты (например, подсолнечное масло), определенные виды минеральных удобрений для фермеров и т.д., а также субсидированные цены на жилье и медикаменты (по поводу общих подходов ЕС к этой проблеме см. (EC, 2022)). Санкции и внешнеторговые ограничения приводят к дисбалансу на рынках подсанкционных стран и заставляют их частично возвращаться к экономике дефицита. Наконец, хорошо известно (хотя точные данные недоступны), что в условиях санкций и ограничений резко возросли теневые поставки подсанкционных товаров, а также нелегальные поставки оружия посредникам по заниженным ценам с целью последующей перепродажи. Масштабы этих операций таковы, что ими уже нельзя пренебречь при анализе рынков соответствующих товаров.

В условиях преобладания рыночной экономики такие методы регулирования неизбежно приводят к тому, что экономические агенты начинают перепродавать продукты по рыночным ценам. Эта ситуация чем-то напоминает положение, сложившееся полвека назад в странах социалистического лагеря, хотя, разумеется, причины возникновения и величина этого сектора экономики различны. Неудивительно, что первые попытки моделировать это явление были предприняты в СССР В.Л. Макаровым и его сотрудниками (Макаров и др., 1982, 1986). Модель, рассмотренная в этих работах, является очень общей, и даже существование равновесия доказано авторами при чрезмерно ограничительных предположениях. Существование равновесия для значительно более общего класса моделей было доказано в (Полтерович, 1990).

Поскольку мы в первую очередь интересуемся распределением товаров в смешанной экономике, мы рассматриваем вариант модели Макарова, в котором отсутствует производство. Математический аппарат, используемый в настоящей работе и ведущий происхождение из элементарной дифференциальной топологии, был впервые введен в математическую экономику Ж. Дебре (Debreu, 1970) и развит в работах И. Баласко, Э. Диркера, А. Мас-Колелла и др. (подход, близкий к нашему, использовался в статьях (Balasko, 1975; Зак, 1981)). Для нас представляет интерес не только структура множества равновесий, но и его поведение при вариации параметров, использовании квот и фиксированных цен в качестве инструментов государственного управления, а также особая роль экономик, находящихся на *гиперповерхности спроса*, разбивающей все экономики на два класса с весьма различными свойствами (см. ниже).

Перейдем к описанию нашей модели. Имеется l продуктов и m экономических агентов с функциями спроса $f_i(p,w_i)$, $i=1,\ldots,m$, где $p\in\mathbb{R}^l_+$ — вектор цен, а w_i — денежные средства (полный доход) агента i.

Мы предполагаем, что функции спроса порождены строго монотонными строго вогнутыми трижды непрерывно диффренцируемыми функциями полезности u_i, так что f_i однородны степени ноль и, по теореме Дебре (Debreu, 1972), дважды непрерывно дифференцируемы, а агрегированная функция спроса $f=\sum_{i=1}^m f_i$ *удовлетворяет условию желательности* (Balasko, 1975) (см. разд. 2). Это означает, что если цены на некоторые из товаров стремятся к нулю, то спрос неограниченно возрастает.

Пусть $\alpha_i\in\overline{\mathbb{R}}^1_+$ — начальный доход участника i и государство предлагает ему купить товары в пределах *квоты* $x_i\in\overline{\mathbb{R}}^l_+$ по фиксированным ценам $q\in\overline{\mathbb{R}}^l_+$. Это означает, что если экономический агент i имеет желание и деньги, он может купить любое количество продукта j, не превышающее x_i^j, по цене q^j, $j=1,\ldots,l$. Отметим, что мы не исключаем важных случаев, когда $x_i^j=0$ (участнику i не выделена квота для покупки продукта j по фиксированной цене q^j) и $q^j=0$ (такие товары, как жилье, медицинское обслуживание и т.д., которые — до определенного уровня — оплачиваются из социальных фондов, относятся к этой категории).

Пусть $y\in\mathbb{R}^l_+$ — вектор всех товаров в нашей экономике. Мы не предполагаем, что $x\leqq y$, поскольку на практике распределение квот нередко предшествует реальному производству или импорту продуктов, и если планы не будут выполнены, то государство не сможет выполнить своих обязательств по поставке некоторых товаров (т.е. $x^j>y^j$ для некоторых $1\le j\le l$). Оставшиеся товары (т.е. не выкупленные по твердым ценам) продаются на свободном рынке по ценам $p\in\mathbb{R}^l_+$. Участники также могут перепродать на свободном рынке (по тем же ценам p) некоторые из товаров, ранее купленных ими у государства, по твердым ценам q.

Экономические агенты станут выкупать свои квоты на товар j если и только если рыночная цена этого товара выше, чем фиксированная, т.е. $p^j>q^j$. Поэтому для исследования состояний равновесия можно считать, что экономический агент i выходит на рынок с денежными средствами $w_i=\alpha_i+\langle(p-q)^+,\ x_i\rangle$, $i=1,\ldots,m$ (где $\langle a,b\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и b, а для $r\in\mathbb{R}^l$ мы полагаем $(r^+)^j=\max\{r^j,0\}$, $j=1,\ldots,l$), складывающимися из начального дохода α_i и денег, вырученных от перепродажи на рынке продуктов, купленных у государства по фиксированным ценам q, при условии что они ниже рыночных цен p. Соответствующий совокупный спрос $f(p;w_1,\ldots,w_m)=\sum_{i=1}^m f_i\left(p,\alpha_i+\left\langle(p-q)^+,x_i\right\rangle\right)$, и цена p называется *равновесной,* если спрос равен предложению, т.е. $f(p;w_1,\ldots,w_m)=y$.

Описанная модель включает в качестве частных случаев модель чистого обмена (когда $x=\sum_{i=1}^m x_i=y$, $\alpha_i=\langle q,x_i\rangle$, $i=1,\ldots,m$; см. предложение 2) и модель с фиксированными доходами (например, когда $x_i=0$, $i=1,\ldots,m$ или $x\leqq y$ и цены q^j, $j=1,\ldots,l$ достаточно велики; см. предложение 1) и получается комбинированием этих двух моделей (точнее говоря, обе эти модели входят в непрерывное семейство экономик, рассматриваемых в настоящей статье). Благодаря этому, в частности, используя известные свойства модели чистого обмена, удается вывести неизвестные ранее свойства модели с фиксированными доходами (например, количество равновесных цен в общей экономике с фиксированными доходами нечетно; см. следствие 4). Однако представляется более важным выявить свойства равновесий, специфические для данной модели.

В отличие от модели чистого обмена и модели с фиксированными доходами, в нашей модели равновесие существует не всегда. Действительно, из закона Вальраса нетрудно вывести, что $\alpha=\langle p\wedge q,y\rangle+\langle(p-q)^+,y-x\rangle$, где $x=\sum_{i=1}^m x_i$, $\alpha=\sum_{i=1}^m\alpha_i$ — совокупный доход, $(p\wedge q)^j=\min\{p^j,q^j\}$, $j=1,\ldots,l$ (см. доказательство формулы (5) в предложении 1). Поэтому если, например, $y\leqq x$, $\alpha>\langle q,x\rangle$, то равновесия нет.

Чтобы решить проблему существования равновесия, мы рассматриваем *гиперповерхность спроса* Ω_0 (см. предложение 3) в пространстве параметров $\Omega=\{\omega=(x_i^j,y_i^j,\alpha_i,q^j)\}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,l$, заметаемую экономиками ω, для которых $y=\sum_{i=1}^m f_i(p,,x_i)$, когда цены p варьируются в $\mathbb{R}^l_+$ (или, что эквивалентно, в единичном симплексе). Гиперповерхность Ω_0 параметризует возможный совокупный спрос агентов, наделенных товарами в размере выделенных им квот (доходы α_i и цены q^j не участвуют в определении Ω_0). Из теоремы Эрроу–Дебре следует, что Ω_0 содержит все экономики, для которых $x=y$.

Гиперповерхность Ω_0 разбивает Ω на несколько связных областей, одна из которых, обозначаемая Ω_-, содержит подмножество $\{x \le y\}$, в котором квотируется только часть имеющихся товаров, а другая, обозначаемая Ω_+, содержит подмножество $\{x \ge y\}$, в котором имеющихся запасов недостаточно для обеспечения квот. При этом в окрестности экономики ω, для которой $x = y$, $\alpha_i = \langle q, x_i \rangle$, $i = 1, \ldots, m$ (т.е. все товары рационируются, причем квоты устанавливаются в соответствии с доходами), а распределение $\{x_i\}$ оптимально по Парето, Ω_0 разбивает Ω в точности на эти две области Ω_- и Ω_+. Мы показываем, что для общей экономики $\omega \in \Omega_-$ число равновесных цен нечетно, а для общей экономики $\omega \in \Omega_+$ число равновесных цен четно (см. теорему 3). Отсюда, в частности, следует, что для всех экономик $\omega \in \Omega_-$ (а значит, и для всех ω, для которых $x \le y$) равновесие существует. Как мы уже отмечали, из этого вытекает существование (и нечетность числа) равновесий в экономике чистого обмена (что впервые было доказано Э. Диркером) и экономике с фиксированными доходами (что, по-видимому, до сих пор не было известно).

Особый интерес представляет проблема существования равновесий для экономик $\omega \in \Omega_0$. В этом случае случае ответ зависит от цен q^j и доходов α_i. Казалось бы, что поскольку гиперповерхность Ω_0 имеет меру ноль, исследованием таких экономик можно было бы пренебречь. Однако случай $y = x$ (полное рационирование) заслуживает специального рассмотрения. Возможная интерпретация этого случая — полная централизация: государство выплачивает каждому участнику i фиксированную сумму α_i (которую можно интерпретировать как базисный доход; α_i может зависеть или не зависеть от участника) и распределяет весь запас продуктов y, выделяя участнику i квоту x_i, $x = \sum_{i=1}^m x_i = y$, в пределах которой он может покупать товары по ценам q. Затем участники обмениваются товарами, купленными в пределах квот, уже по рыночным ценам в соответствии со своими функциями спроса.

Возможна и другая интерпретация случая, когда $y = x$, $\alpha = \langle q, x \rangle$. Пусть y_i — начальный запас продуктов экономического агента i. Государство обязывает его поставить экономическому агенту k определенный набор продуктов y_{ik}, $k = 1, \ldots, m$ по фиксированным ценам q (при условии, что агент k согласен купить эти продукты по заданным ценам). После этого участники выходят на свободный (или, в зависимости от точки зрения, теневой) рынок, на котором торгуют как остатками своих начальных запасов, так и продуктами, приобретенными в рамках гарантированных поставок, по рыночным ценам p. Нетрудно убедиться в том, что эта интерпретация эквивалентна предыдущей с $\alpha_i = \langle q, y_i \rangle$, $x_i = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki} - y_{ik})$.

В случае когда $y = x$, равновесие существует если и только если $\alpha \le \langle q, x \rangle$. При этом для почти всех экономик с $\alpha < \langle q, x \rangle$ число равновесий конечно (нечетно, см. теорему 2), а для почти всех экономик с $\alpha = \langle q, x \rangle$ многообразие равновесных цен диффеоморфно объединению нечетного числа лучей (вдоль которых цены на все продукты стремятся к бесконечности) и конечного числа дуг (см. теорему 1).

При исследовании нашей модели естественно считать квоты x_i^j, цены q^j, а при некоторых интерпретациях и доходы α_i управляющими параметрами, используя которые государство осуществляет свою экономическую политику. Но какие цели преследует государство, и в чем преимущество управления квотами x_i^j по сравнению с использованием финансовых инструментов α_i и q^j? Наиболее распространенные неприятные явления в теории экономического равновесия — это множественные и неустойчивые состояния равновесия (в нашей модели все состояния равновесия в экономике ω могут быть устойчивыми, только если равновесие единственно). Поэтому естественно потребовать, чтобы, варьируя управляющие параметры, государство могло перевести экономику в состояние, для которого существует единственный равновесный вектор цен, устойчивый по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования (tâtonnement).

Следующий результат (см. теоремы 4 и 5) напоминает результаты статьи (Balasko, 1975), но в то время как в модели Баласко квоты x_i просто выдаются участникам, в нашей модели им предлагается выкупить квоты по фиксированным ценам q.

Пусть $\omega \in \Omega_-$ — экономика, близкая к экономике ω_0, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ — оптимально по Парето, и пусть $y(\omega_0) = x(\omega_0)$, $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда при достаточно общих предположениях в экономике ω существует единственное равновесие, устойчивое по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования.

Этот результат не является очевидным, поскольку в самой экономике ω_0 и в некоторых близких к ней экономиках из Ω_0 множество равновесных цен неограничено. Более того, равновесные цены в ω не ограничены: для подходящих доходов цены стремятся к бесконечности, когда $\omega \to \omega_0$ (если $(y - x) = o(\alpha - \langle q, x \rangle)$, то неограниченность цен очевидна — слишком высокие доходы ведут к инфляции).

Разумеется, для того чтобы привести экономику в состояние, описываемое в теореме 4, государство должно иметь некоторое представление о предпочтениях и доходах, но точного знания не требуется.

В теореме 6 мы исследуем проблему единственности и устойчивости равновесия для экономик $\omega \in \Omega_-$ и некоторых экономик из Ω_0 в случае (разных вариантов) нормального спроса и валовой заменимости.

В то время как свойства экономик из Ω_- трудно назвать неожиданными, ситуация в Ω_+ (в частности в случае, когда квоты x превышают предложение y) необычна и представляет интерес. Пусть $\omega \in \Omega_+$ — экономика, близкая к оптимальной по Парето экономике ω_0. В теореме 7 (см. также замечание 11) мы показываем, что если доходы участников не слишком велики, то в экономике ω существуют два равновесных вектора цен: один «маленький» и устойчивый, а второй «большой» и неустойчивый (по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования).

Как мы уже отмечали, множество равновесных цен в общей экономике ω, для которой $x = y$ и $\langle q, x\rangle = \alpha$, является объединением нечетного числа лучей, вдоль которых цены на все товары стремятся к бесконечности, и конечного числа дуг. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, то равновесный луч единственен, а если к тому же стоимости предписанных нетто-поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_k\rangle|$, $k = 1,\ldots,m$ малы, то равновесные дуги отсутствуют (см. теорему 1).

Распределяя квоты, государство пытается перевести экономику в состояние, близкое к оптимальному по Парето, но результирующее равновесное распределение (также Парето-оптимальное) варьируется вдоль равновесного луча и может отклониться от запланированного распределения $\{x_k\}$. Однако по мере того как равновесные цены неограниченно растут, соответствующее равновесное распределение стремится к равновесию в экономике чистого обмена с начальными запасами $\{x_k\}$, которое (при наших предположениях) единственно и мало отличается от $\{x_k\}$. Ясно, что при этом некоторые участники выигрывают от возрастания цен вдоль равновесного луча, а другие проигрывают.

В теореме 8 мы показываем, что в нашей модели вальрасовский процесс ценообразования локально устойчив, если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному и либо все $|\langle q, \Delta y_i\rangle|$ малы, либо начальный вектор цен p_0 велик, и глобально стабилен, если избыточный спрос удовлетворяет условию валовой заменимости. Однако в то время как стандартный вальрасовский процесс устойчив к инфляции, поскольку, в силу закона Вальраса, $d\langle p(t), p(t)\rangle / dt = 2\langle dp(t)/dt, p(t)\rangle = 0$, в нашей ситуации можно надеяться на сходимость процесса, только если начальный вектор цен достаточно велик.

В то время как в модели чистого обмена естественно предположить, что ценообразующий орган беспристрастен, в нашей модели государство осуществляет активную распределительную политику, и правдоподобным выглядит предположение, что оно приписывает индивидуальным функциям избыточного спроса некоторые веса. Это приводит к системе дифференциальных уравнений $dp/dt = E_\mu(p) = \sum_{i=1}^m \mu_i E_i(p)$, где $\mu_i > 0$, а $E_i(p) = f_i(p, \langle p, x_i\rangle - \langle q, \Delta y_i\rangle) - x_i$ $(p \geqq q)$ — функция избыточного спроса участника i по завершении плановых поставок. Представляется разумным выбрать веса μ_i в зависимости от взаимных поставок, а именно вес нетто-потребителя ($\langle q, \Delta y_i\rangle > 0$) должен быть меньше, чем нетто-поставщика ($\langle q, \Delta y_i\rangle < 0$). В общей ситуации можно предположить, что веса μ_i монотонно убывают по мере возрастания стоимости поставок $\langle q, \Delta y_i\rangle$.

При указанных выше условиях для функции $E_\mu(p)$ соотношение Вальраса не выполняется и на траекториях нашего процесса ценообразования цены растут. В общем случае линейная система $dp/dt = E_\mu(p)$ не имеет устойчивых решений в окрестности равновесных цен, но если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, а p — достаточно большой равновесный вектор цен, то $\| E_\mu(p)\|$ мало. В теореме 9 мы показываем, что если все участники имеют нормальный спрос, удовлетворяющий условию валовой заменимости, то описанный выше процесс ценообразования глобально устойчив, длина вектора $p(t)$ неограниченно возрастает, а нормализованный вектор цен сходится к решению системы уравнений $\sum_{i=1}^m \mu_i (f_i(p, \langle p, x_i\rangle) - x_i) = 0$. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному или все веса близки к 1, то предельный нормализованный вектор цен близок к равновесному вектору цен в модели чистого обмена с начальными запасами $\{x_i\}$, который, в свою очередь, является пределом нормализованных векторов цен в нашей модели. Отличие от модели чистого обмена в том, что в последней *индивидуальные* функции избыточного спроса удовлетворяют закону Вальраса, и для взвешенной функции избыточного спроса $d\| p(t)\|^2 / dt = 2\langle p(t), E_\mu(p(t))\rangle = 0$. В нашей же модели разумный выбор весов приводит к «эндогенной инфляции», связанной с процессом ценообразования, темп которой зависит от весов и нетто-поставок по твердым ценам. Наш результат показывает, что при определенных условиях этот тип инфляции может играть положительную роль, помогая (хотя бы приблизительно) сбалансировать рынок.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В модели имеется m экономических агентов, между которыми распределяется имеющийся в наличии набор продуктов $y \in \mathbb{R}^l_+$. Поведение экономического агента i определяется функцией спроса $f_i : \mathbb{R}^l_+ \times \overline{\mathbb{R}}^1_+ \to \overline{\mathbb{R}}^l_+$, а именно при рыночных ценах $p \in \mathbb{R}^l_+$ и доходах $w_i \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$ спрос составляет $f_i(p, w_i)$. Из экономических соображений естественно считать, что f_i однородна степени ноль, т.е.

$$f_i(\lambda p, \lambda w_i) = f_i(p, w_i), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1_+, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

и удовлетворяет закону Вальраса

$$\left\langle p, f_i(p, w_i) \right\rangle = w_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

т.е. каждый экономический агент тратит весь доход на приобретение необходимых продуктов. Кроме того, естественно считать, что

$$f_i(p, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что функция совокупного спроса $f(p, w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, w_i)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие желательности (Balasko, 1975). Если $p_n \to \overline{p}$, $p_n \in \mathbb{R}^l_+$, $\overline{p}^j = 0$ для некоторого $1 \le j \le l$, $\underline{\lim}\, w_n > 0$, $w_n = \sum_{i=1}^m (w_i)_n$, то $\| f(p_n; (w_1)_n, \ldots, (w_m)_n) \| \to \infty$.

Условие желательности означает, что если совокупный доход ограничен снизу положительной константой, то безудержное удешевление некоторых товаров ведет к неограниченному росту совокупного спроса. Условия такого рода неоднократно обсуждались в литературе (Balasko, 1975; Зак, 1981) и представляются довольно реалистичными для больших экономик, допускающих многоцелевое использование ресурсов.

Хотя эти требования можно было бы ослабить, мы будем предполагать, что функции спроса f_i порождены строго монотонными строго вогнутыми трижды непрерывно дифференцируемыми функциями полезности $u_i : \overline{\mathbb{R}}^l_+ \to \mathbb{R}^1$: $f_i(p, w_i) = \operatorname{argmax}_{\langle p,x \rangle \le w_i} u_i(x)$. В этом случае функции f_i удовлетворяют условиям (1)–(3) и дважды непрерывно дифференцируемы (Debreu, 1972).

В нашей модели экономический агент i располагает доходом $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$, и ему выделены квоты $x_i \in \overline{\mathbb{R}}^l_+$ для закупки по твердым («государственным» или субсидированным) ценам $q \in \overline{\mathbb{R}}^l_+$. Это означает, что — при желании и наличии денег — он может купить по цене q^j любое количество продукта j, не превосходящее x_i^j, $j = 1, \ldots, l$ (мы не исключаем из рассмотрения важные случаи $x_i^j = 0$ (квоты не выделены) и $q^j = 0$ (к этой категории относятся такие товары, как жилье, медицинское обслуживание и т.д., которые — до определенного уровня — оплачиваются из социальных фондов). Подчеркнем, что *a priori* мы не устанавливаем никаких ограничений на соотношение между вектором доступных товаров y и вектором квотируемых товаров $x = \sum_{i=1}^m x_i$, в то время как казалось бы естественным предположить, что $x \leqq y$. Дело в том, что на практике распределение квот нередко предшествует реальному производству или импорту продуктов, и если планы не будут выполнены, то государство не сможет выполнить свои обязательства по поставке некоторых товаров (т.е. $x^j > y^j$ для некоторых j, $1 \le j \le l$).

Оставшиеся товары (т.е. не выкупленные по ценам q) продаются на свободном рынке по ценам $p \in \mathbb{R}^l_+$. Участники также могут перепродать по рыночным ценам p некоторые из товаров, ранее купленных ими у государства по твердым ценам q.

Экономические агенты станут выкупать свои квоты на товар j, если и только если рыночная цена этого товара выше, чем фиксированная, т.е. $p^j > q^j$. Поэтому для исследования состояний равновесия можно считать, что экономический агент i выходит на рынок с денежными средствами $w_i = \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle$, $i = 1, \ldots, m$ (где для $r \in \mathbb{R}^l$ мы полагаем $(r^+)^j = \max\{r^j, 0\}$, $j = 1, \ldots, l$), складывающимися из начального дохода α_i и денег, вырученных от перепродажи на рынке продуктов, купленных у государства по фиксированным ценам q при условии, что они ниже рыночных цен p. Соответствующий совокупный спрос равен $f(p, w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle)$, а цена p называется *равновесной,* если спрос равен предложению, т.е.

$$f(p, w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i\left(p, \alpha_i + \left\langle (p-q)^+, x_i \right\rangle \right) = y. \tag{4}$$

Отметим, что здесь мы не касаемся механизмов краткосрочного кредитования, позволяющих экономическим агентам выкупать свои квоты, даже если у них не хватает денег, — важно, что в результате функционирования рынка при равновесных ценах их задолженности погашаются.

2.1. Частные случаи

Описанная модель включает в качестве частных случаев модели равновесия в экономике с фиксированными доходами и в экономике чистого обмена. В частности, модель с фиксированными доходами α_i получается, если $x_i = 0$, $i = 1,\ldots,m$ (квоты не выделены). Однако на самом деле экономики с фиксированными доходами встречаются в нашей модели гораздо чаще.

Предложение 1.

А. *Предположим, что* $x = \sum_{i=1}^m x_i \leqq y$, *а твердые цены* q^j *настолько велики, что* $q^j y^j > \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $j = 1,\ldots,l$. *Тогда равновесные цены в нашей модели такие же, как в модели с распределяемыми ресурсами* y *и фиксированными доходами* α_i, $i = 1,\ldots,m$. *В частности, если фиксированные цены достаточно высоки, то в экономике обязательно существует равновесие (см. следствие 4).*

Б. *Для произвольных* $y > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ *существует вектор цен* $\bar{q}$ *такой, что при* $q > \bar{q}$ *множество равновесных цен* p *в нашей модели с товарными запасами* y, *доходами* α_i, *квотами* x_i *и фиксированными ценами* q, *удовлетворяющих условию* $p < q$, *совпадает с множеством равновесных цен в модели с распределяемыми ресурсами* y *и фиксированными доходами* α_i, $i = 1,\ldots,m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

А. Суммируя (2) с учетом (4), получаем следующий закон Вальраса для нашей модели:

$$\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle + \langle (p-q)^+, y - x \rangle, \tag{5}$$

где p — произвольная равновесная цена, а «$\wedge$» обозначает минимум. В условиях предложения $q > p$, поскольку если бы было $p^j \geq q^j$, то из (5) вытекало бы, что $\alpha \geq q^j y^j$. Поэтому условие равновесия (4) переписывается в виде

$$f(p, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i) = y, \tag{6}$$

т.е. всякая равновесная цена в нашей модели является равновесной ценой в модели с фиксированными доходами. Обратно, если p удовлетворяет (6), то из (2) следует, что $\alpha = \langle p, y \rangle$, так что $p^j y^j < \alpha$ и $p^j < \alpha / y^j < q^j$, $j = 1,\ldots,l$, т.е. p удовлетворяет (4) и является равновесием в нашей модели. ■

Б. Пусть $P \subset \mathbb{R}^l_+$ — множество равновесных цен в описанной в Б) модели с фиксированными доходами. Из условия желательности следует, что P компактно и существует вектор $\bar{q}$ такой, что $p < \bar{q}$ для всякого $p \in P$. Поскольку участники станут выкупать свои квоты на товар j, если и только если $p^j > q^j > \bar{q}^j$, для всякого $p \in P$ выполнено неравенство $p < q$ (т.е. $p^j < q^j$ для всех j, $1 \leq j \leq m$). Наше утверждение теперь немедленно вытекает из условия равновесия (4). ■

Замечание 1. Предложение 1 показывает, что экономики с фиксированными доходами встречаются в нашей модели достаточно часто (из параметризации, введенной в следующем разделе, следует, что они образуют открытое подмножество в пространстве всех экономик), и из свойств нашей модели мы можем выводить неизвестные ранее свойства модели с фиксированными доходами (см. разд. 4, следствие 4).

Замечание 2. Согласно следствию 4 для общей экономики с фиксированными доходами число равновесных цен нечетно. С другой стороны, теорема 3 показывает, что при $x > y$ число равновесий в общей экономике четно. Поэтому в условиях предложения 1 Б для общей экономики существует равновесный вектор цен p, для которого $p \not< q$.

Замечание 3. Рассуждение из доказательства предложения 1 Б доказывает и следующий более общий факт. Пусть $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ — произвольное подмножество товаров. Для произвольных $y > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ существуют цены $\bar{q}^{j_1}, \ldots, \bar{q}^{j_r}$ такие, что если $q^j > \bar{q}^j$ при всех $j \in J$, то множество равновесных цен p в нашей модели с товарными запасами y, доходами α_i, квотами x_i и фиксированными ценами q, удовлетворяющими условию $p^j < q^j$ при $j \in J$, не зависит от квот на товары из J (в частности, при изучении таких равновесных цен можно считать, что товары из J не рационируются).

Наш подход к исследованию описанной выше модели основан на том, что она включает в качестве частного случая хорошо исследованные модели чистого обмена.

Предложение 2. *Предположим, что* $x = y$, *и пусть* $\alpha_i = \langle q, x_i \rangle$, $i = 1,\ldots,m$. *Тогда равновесные цены в нашей модели имеют вид* $\lambda\bar{p}$, *где* $\bar{p}$ *произвольная (нормированная) равновесная цена в экономике чистого обмена с начальными запасами* x_i, *а* $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$ *таково, что* $\lambda\bar{p} \geq q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4) вытекает, что указанные в формулировке предложения цены являются равновесными. Обратно, если p равновесная цена в нашей модели, то из условия предложения и закона Вальраса (5) вытекает, что $p \wedge q = q$, т.е. $p \geq q$. Но тогда из (4) и условия предложения вытекает, что p равновесная цена в модели чистого обмена. ■

Замечание 4. В отличие от экономик с фиксированными доходами экономики чистого обмена встречаются в нашей модели редко (образуют замкнутое подмножество меньшей размерности в пространстве параметров Ω, подробно рассматриваемом в следующем разделе), а множество равновесных цен в них по меньшей мере одномерно (выдерживает умножение на произвольное вещественное число $t \geq 1$).

3. СООТВЕТСТВИЕ ВАЛЬРАСА

Состояние экономики в нашей модели определяется $lm + 2l + m$ параметрами, а именно квотами x_i^j, установленными государством ценами q^j, доходами участников α_i и ресурсами y^j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$. Таким образом, экономика задается точкой ω в многообразии (с границей) $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^{lm+2l+m}}$, $\omega = (x_i^j, q^j, \alpha_i, y^j)$, $x_i^j \geq 0$, $q^j \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $y^j > 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$. Изучение состояний равновесия сводится к исследованию многообразия (с границей)

$$W = \left\{ (\omega, p) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^l \,\middle|\, \sum_{i=1}^m f_i\left(p, \alpha_i + \left\langle (p-q)^+, x_i \right\rangle\right) - y = 0 \right\},$$

называемого *многообразием Вальраса*. Обозначим через $\pi: W \to \Omega$ проектирование $W \subset \Omega \times \mathbb{R}_+^l$ в первый сомножитель. Тогда точки слоя $\pi^{-1}(\omega)$ взаимно однозначно соответствуют равновесным ценам в экономике ω. Важную роль в исследовании нашей модели играет описание точек, в которых отображение π является собственным (т.е. прообраз компакта компакт).

Лемма 1. *Пусть $\omega \in \Omega$ — экономика, для которой $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i > 0$. Тогда в некоторой окрестности U точки ω в Ω равновесные цены отделены от нуля, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что при $\omega' \in U$ для всякого равновесного вектора цен p в ω' выполнено неравенство $p^j > C$, $j = 1, \ldots, l$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют последовательность экономик $\omega_n \to \omega$ и последовательность равновесных цен p_n в ω_n такие, что $p_n^j \to 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$. Но из условия желательности вытекает, что в этом случае $\| f(p_n, \omega_n) \| \to \infty$ вопреки тому, что $f(p_n, \omega_n) \to y$ (здесь и далее $f(p, \omega) = \sum_{i=1}^m f_i\left(p, \alpha_i + \left\langle (p-q)^+, x_i \right\rangle\right)$). ■

Замечание 5. Отметим, что в граничных точках Ω, исключенных нами из рассмотрения, равновесных цен, как правило, не существует. Так, если $\alpha = 0$, закон Вальраса (5) показывает, что при $x \leqq y$ (квотируется только часть имеющихся продуктов) обязательно $x = y$ и $q = 0$, и при этом наша модель сводится к модели чистого обмена с ненормированными ценами.

Лемма 2. *Пусть $\omega, \omega_n \in \Omega$, $\omega_n \to \omega$, и пусть p_n — последовательность равновесных цен в ω_n такая, что, для некоторого j, $1 \leq j \leq l$, $p_n^j \to \infty$. Тогда $p^r = O(p^s)$ для всех $1 \leq r$, $s \leq l$, т.е. существуют константы $0 < c_1^{r,s}$, $c_2^{r,s} < \infty$ такие, что $c_1^{r,s} < p_n^r / p_n^s < c_2^{r,s}$, и в частности $p_n^r \to \infty$ для всех $1 \leq r \leq l$.*

Доказательство. Предположим противное. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $p_n^s \to \infty$, $p_n^r / p_n^s \to 0$. Тогда из (1) следует, что

$$f(p_n, \omega_n) = \sum_{i=1}^m f_i\left(\frac{p_n}{p_n^s}, \frac{(\alpha_i)_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, (x_i)_n \right\rangle\right),$$

причем $(\alpha_i)_n / p_n^s \to 0$, $p_n^r / p_n^s \to 0$. Из условия желательности следует, что

$$w_n = \frac{\alpha_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, x_n \right\rangle \to 0.$$

Однако закон Вальраса (5) дает

$$w_n = \frac{\alpha_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, x_n \right\rangle = \left\langle \frac{p_n}{p_n^s}, y_n \right\rangle \geq y_n^s.$$

Поскольку $y_n^s \to y^s > 0$, получаем противоречие. ■

Следствие 1. Пусть $W^M = W \cap \left\{ \sum_{j=1}^l \gamma_j p^j = M \right\}$, где $0 \leq \gamma_j$, $\gamma = \sum_{j=1}^l \gamma_j > 0$, $M > 0$, т.е. цены нормированы произвольным линейным (хотя это несущественно) способом. Тогда $\pi^M = \pi_{|W^M} : W^M \to \Omega$ — собственное отображение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 вытекает, что в прообразе любого компакта из Ω равновесные цены ограничены. Остается проверить, что они отделены от нуля. В случае когда $\lim\alpha_n > 0$, это сделано в лемме 1. Если же $\alpha_n \to 0$, $p_n^j \to 0$, то из условия желательности вытекает, что $w_n = \langle (p_n - q_n)^+, x_n\rangle \to 0$. Закон Вальраса (5) показывает, что $\langle p_n, y_n\rangle = \langle (p_n - q_n)^+, x_n\rangle + \alpha_n \to 0$. Но $y_n \to y > 0$, и следовательно $p_n \to 0$ вопреки условию нормировки $\sum_{j=1}^{l}\gamma_j p^j = M$. ■

Предложение 3. *Существует гиперповерхность* $\Omega_0 \subset \Omega$ *такая, что для экономики* $\omega \in \pi(W) \subset \Omega$, *для которой* $\alpha(\omega) \neq 0$, *отображение* π *является собственным в окрестности* ω, *если и только если* $\omega \notin \Omega_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что π не является собственным в окрестности ω. Согласно леммам 1 и 2 можно считать, что существуют последовательность экономик $\omega_n \to \omega$ и последовательность равновесных цен p_n в ω_n такие, что $p_n^l \to \infty$, $p_n / p_n^l \to p \in \mathbb{R}_+^l$. Поскольку, в очевидных обозначениях, $\sum_{i=1}^{m} f_i(p_n, (\alpha_i)_n + \langle p_n - q_n)^+, (x_i)_n\rangle = y_n$, используя (1) и переходя к пределу, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, \langle p, x_i\rangle) = y. \tag{7}$$

Из (3) и (7) следует, что $\omega \in \Omega_0$, где

$$\Omega_0 = \overline{\mathbb{R}}_+^m \times \overline{\mathbb{R}}_+^l \times \Omega_0', \tag{8}$$

причем $\overline{\mathbb{R}}_+^m$ параметризует доходы α_i, $i = 1,\ldots,m$, $\overline{\mathbb{R}}_+^l$ параметризует цены q^j, $j = 1,\ldots,l$, $\Omega_0' = \{(x_1,\ldots,x_m,y) \mid 0 < y = f(p,\langle p,x_1\rangle,\ldots,\langle p,x_m\rangle)\ \exists p \in \mathbb{R}_+^l\}$. Ясно, что Ω_0' открыто и всюду плотно в образе собственного отображения $\varphi : \overline{\mathbb{R}}_+^{lm} \times \overline{\mathbb{R}}_+^{l-1}$, $\varphi(x_1,\ldots,x_m,p) = (x_1,\ldots,x_m, f(p,\langle p,x_1\rangle,\ldots,\langle p,x_m\rangle)$, где $p \in \mathbb{R}_+^{l-1} \subset \mathbb{R}_+^l$, $p = (p^1,\ldots,p^{l-1},1)$ — нормированный вектор цен. Из подсчета дифференциала отображения φ (см., например, (Зак, 1981, предложение 1.8)) немедленно вытекает, что Ω_0' (а, следовательно, и Ω_0) — гиперповерхность. Осталось проверить, что если $\omega \in \pi(W) \cap \Omega_0$, то π не является собственным в окрестности ω. Действительно, пусть $f(p,\langle p,x_1\rangle,\ldots,\langle p,x_m\rangle) = y$. Положим $p_n = np$, $q_n = q$, $y_n = y$, $(\alpha_i)_n = \alpha_i$,

$$(x_i)_n = \begin{cases} (1+\varepsilon_{in})x_i, & x_i \neq 0; \\ 0, & x_i = 0; \end{cases} \quad i = 1,\ldots,m, \text{ где } \varepsilon_{in} = \frac{\langle q, x_i\rangle - \alpha_i}{n\langle p, x_i\rangle - \langle q, x_i\rangle}.$$

Тогда $\omega_n = ((x_1)_n,\ldots,(x_m)_n,\ q_n^1,\ldots,q_n^l,\ (\alpha_1)_n,\ldots,(\alpha_m)_n,\ y_n^1,\ldots,y_n^l) \to \omega$, $p_n \to \infty$, и при достаточно больших n цены p_n равновесны в ω_n, что и доказывает несобственность π. ■

Следствие 2. Ограничение отображения π на $\Omega_< = \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq 0,\ x(\omega) \le y(\omega)\}$ и $\Omega_> = \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq 0, x(\omega) \ge y(\omega)\}$ собственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что $\Omega_< \cap \Omega_0 = \Omega_> \cap \Omega_0 = \varnothing$. Но при $x \le y$ (соответственно $x \ge y$) $f(p,\langle p,x_1\rangle,\ldots,\langle p,x_m\rangle) \neq y$ ни для какого $p > 0$, поскольку, очевидно, $\langle p,x\rangle < \langle p,y\rangle$ (соответственно $\langle p,x\rangle > \langle p,y\rangle$). ■

Замечание 6. Из условия желательности вытекает, что гиперповерхность Ω_0 разбивает Ω на несколько связных областей, среди которых $\Omega_- \supset \Omega_<$ и $\Omega_+ \supset \Omega_>$. Заметим, что если $\omega \in \Omega_0$, $x(\omega) = y(\omega)$ и распределение $\{x_i(\omega)\}$ оптимально по Парето, то для малой окрестности $U \ni \omega$ выполнено соотношение $U = U_- \cup U_0 \cup U_+$, где $U_0 = U \cap \Omega_0$, $U_- = U \cap \Omega_-$, $U_+ = U \cap \Omega_+$. Действительно, в этом случае отображение φ, построенное при доказательстве предложения 3, является диффеоморфизмом в окрестности ω (Зак, 1981, предложения 1.8, 1.9), и из теоремы Жордана–Брауэра вытекает, что гиперповерхность $\Omega_0 \cap U$ разбивает U на две компоненты, общей границей которых она является.

С экономической точки зрения особый интерес представляет случай, когда $x = y$, т.е. нормируется распределение всех имеющихся продуктов. В этом случае нам потребуется более тонкий анализ собственности π.

Следствие 3. Предположим, что $\alpha(\omega) > 0$, $x(\omega) = y(\omega)$ (так что, в частности, $\omega \in \Omega_0$). Тогда при $\alpha < \langle q,x\rangle$ (соответственно $\alpha > \langle q,x\rangle$) ограничение π на $\Omega_\le = \overline{\Omega}_< = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') \leqq y(\omega')\}$ (соответственно $\Omega_\ge = \overline{\Omega}_> = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') \geqq y(\omega')\}$) — собственно в окрестности ω. При этом $\pi(W) \cap \Omega_\ge \subset \{\omega' \in \Omega_\ge \mid \alpha(\omega') \le \langle q,x\rangle\}$. В частности, если $\omega \in \Omega_= = \Omega_\le \cap \Omega_\ge = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') = y(\omega')\}$, то $\pi(W) \cap \Omega_= \subset \{\omega' \in \Omega_= \mid \alpha \le \langle q,x\rangle\}$ и ограничение π на $\{\omega' \in \Omega_= \mid \alpha < \langle q,x\rangle\}$ собственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\pi_{|\Omega_\le}$ ($\pi_{|\Omega_\ge}$) не является собственным в ω. Тогда из лемм 1 и 2 вытекает, что существуют последовательность экономик $\omega_n \in \Omega_\le$ ($\omega_n \in \Omega_\ge$) и последовательность равновесных векторов цен p_n в ω_n такие, что $\omega_n \to \omega$, $\sum_{i=1}^{m} f_i(p_n, (\alpha_i)_n + \langle (p_n - q_n)^+, (x_i)_n\rangle) = y_n$

и $p_n^j \to \infty$, $j = 1,\ldots,l$. Поэтому для достаточно больших n закон Вальраса (5) приобретает вид $\alpha_n - \langle q_n, x_n \rangle = \langle p_n, y_n - x_n \rangle$, откуда и вытекает первое утверждение следствия. Из (5) также следует, что если $\omega' \in \pi(W) \cap \Omega_{\geq}$, то

$$\alpha \leq \langle p \wedge q, y \rangle \leq \langle q, y \rangle \leq \langle q, x \rangle. \blacksquare \tag{9}$$

Замечание 7. Из наших последующих результатов (см. теоремы 1 и 2 в разд. 4) вытекает, что достаточные условия в формулировке следствия 3 являются также необходимыми и что $\Omega_{<} \subset \pi(W)$, $\pi(W) \cap \Omega_{=} = \{\omega' \in \Omega_{=} \mid \alpha \leq \langle q, x \rangle\}$.

Одной из наших основных целей является исследование поведения равновесных цен при вариации экономики ω. Введем координаты $x_i^j, q^j, \alpha_i, y^j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$ в Ω и координаты $x_i^j, q^j, \alpha_i, p^j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$ в W. В этих координатах отображение π задается формулой

$$y = \sum\nolimits_{i=1}^m f_i \left(p, \alpha_i + \left\langle (p-q)^+, x_i \right\rangle \right).$$

Матрица Якоби π имеет вид

$$d\pi = \begin{pmatrix} \mathrm{id}^{lm+l+m} & * \\ 0 & J \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где id — матрица тождественного преобразования; * — матрица порядка $(lm+l+m) \times l$; J — $l \times l$-матрица, для которой

$$J_{jr} = \sum_{k=1}^{r} \left[\frac{\partial f_k^r \left(p, \alpha_k + \left\langle (p-q)^+, x_k \right\rangle \right)}{\partial p^j} + \frac{\partial f_k^r \left(p, \alpha_k + \left\langle (p-q)^+, x_k \right\rangle \right)}{\partial w_k} x_k^j \delta_j \right], \tag{11}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & p^j > q^j, \\ 0, & p^j \leq q^j. \end{cases}$$

В частности, если $x = y$, $\alpha_k = \langle q, x_k \rangle$, $k = 1,\ldots,m$ и $p > q$ (из (5) вытекает, что при этих условиях всегда $p \geq q$), то $J = \partial\zeta(p, x_1,\ldots,x_m)/\partial p$, где $\zeta = f(p, \langle p, x_1 \rangle, \ldots, \langle p, x_m \rangle) - x$, и если распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, то матрица J отрицательно полуопределена, $\mathrm{rk}\, J = l-1$ и $\mathrm{Ker}\, J = \mathbb{R}p$ (где, как обычно, $\mathrm{rk}\, J$ и $\mathrm{Ker}\, J$ обозначают соответственно ранг и ядро матрицы J, а равенство $(\partial\zeta/\partial p)p = 0$ не что иное, как формула Эйлера), см. (Зак, 1981, предложение 1.8).

Помимо исследования свойств отображения π, нам потребуется изучить свойства его ограничения $\pi_{=}$ на подмногообразие $W_{=} = \pi^{-1}(\Omega_{=})$. Пусть $1 \leq i \leq m$. В качестве координат в $\Omega_{=}$ можно взять x_k^j, α_k, q^j, x_i^j, α_i, а в качестве координат в $W_{=}$ — x_k^j, α_k, q^j, $w_i = \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle$, p^j, $1 \leq k \leq m$, $k \neq i$, $1 \leq j \leq l$. В этих координатах отображение $\pi_{=}$ является произведением проекции на отображение $W_{=} \to \mathbb{R}_+^{l+1}$, задаваемое формулами

$$x_i = \sum_{k \neq i} f_k \left(p, \alpha_k + \left\langle (p-q)^+, x_k \right\rangle \right) + f_i(p, w_i) - \sum_{k \neq i} x_k, \quad \alpha_i = w_i - \left\langle (p-q)^+, x_i \right\rangle \tag{12}$$

(где во вторую формулу x_i подставляется из первой). Дифференцируя (12), получаем матрицу Якоби $\pi_{=}$, которая элементарными преобразованиями приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}^{lm+m} & * \\ 0 & J \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Таким образом, матрицы дифференциалов $d\pi_{=}$ и $d\pi$ устроены по существу одинаково, и их свойства определяются свойствами матрицы J (см. (11)).

4. РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Начнем с исследования равновесий в случае когда квотируются все имеющиеся продукты, т.е. с изучения отображения $\pi_{=} : W_{=} \to \Omega_{=}$. Как мы уже отмечали в следствии 3, из закона Вальраса следует, что $\pi_{=}(W_{=}) \subset \{\omega \in \Omega_{=} \mid \alpha \leq \langle q, x \rangle\}$, причем если $\Omega_{=}^{=} = \{\omega \in \Omega_{=} \mid \alpha = \langle q, x \rangle\}$, $\Omega_{=}^{<} = \{\omega \in \Omega_{=} \mid 0 < \alpha < \langle q, x \rangle\}$, то

$$W_{=}^{=} = \pi_{=}^{-1}(\Omega_{=}^{=}) = W_{=} \cap \{p \geq q\} \tag{14}$$

и $\pi_{=}^{<} = \pi_{|W_{=}^{<}} : W_{=}^{<} = \pi_{=}^{-1}(\Omega_{=}^{<}) = (W_{=} \setminus W_{=}^{=}) \to \Omega_{=}^{<}$ — собственное отображение.

Теорема 1. $\pi(W_{=}^{=}) = \Omega_{=}^{=}$, *т.е. для всякой экономики* $\omega \in \Omega_{=}^{=}$ *существует равновесная цена. При этом для почти всех экономик* $\omega \in \Omega_{=}^{=}$ *множество состояний равновесия (или равновесных цен)* $\pi_{=}^{-1}(\omega)$

диффеоморфно объединению нечетного числа лучей (замкнутых при $\alpha > 0$ и открытых при $\alpha = q = 0$), вдоль которых все компоненты равновесных цен p стремятся к бесконечности, и конечного числа дуг окружностей. Если вдобавок экономика ω близка к экономике ω_0, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k = \langle q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$, то $\pi^{-1}(\omega)$ — диффеоморфно лучу.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то $q = 0$ и модель сводится к модели чистого обмена, так что $\pi_{=}^{-1}(\omega) = \cup_r \mathbb{R}_+^1 p_r$, где $\{p_r\}$ — (нормированные) равновесные цены в модели чистого обмена. Предположим поэтому, что $\alpha > 0$. Обозначим через $\partial W_{=}^{=}$ границу $W_{=}^{=}$ в $W_{=}$, так что

$$\partial W_{=}^{=} = \cup_{j=1}^{l}\{(\omega, p) \in W_{=}^{=} \mid p \geqq q, p^j = q^j\}. \tag{15}$$

Поскольку $\alpha > 0$, из лемм 1 и 2 следует, что $\pi_{|\partial W_{=}^{=}} : \partial W_{=}^{=} \to \Omega_{=}^{=} \setminus \{\alpha = 0\}$ — собственное отображение (сравни со следствием 1). Из (14) вытекает, что $\dim \partial W_{=}^{=} = \dim W_{=} - 1 = \dim \Omega_{=} - 1 = \dim \Omega_{=}^{=}$ и $\partial W_{=}^{=}$ является топологическим многообразием, причем гладкая структура $W_{=}^{=}$ индуцирует на $\partial W_{=}^{=}$ гладкую структуру вне подмножества

$$\partial_b W_{=}^{=} = \bigcup_{\substack{j,r=1\\ j\neq r}}^{1}\{(\omega, p) \in \partial W_{=}^{=} \mid p^j = q^j, p^r = q^r\}.$$

Пусть $\omega \in \Omega_{=}^{=} \setminus \pi(\partial_n W_{=}^{=})$ — экономика, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето. Из теории экономик чистого обмена (см., например, (Balasko, 1975)) известно, что $\pi^{-1}(\omega) = (\omega, \mathbb{R}_+^1 p)$, где p — нормированная равновесная цена. Следовательно, $(\pi_{|\partial W_{=}^{=}})^{-1}(\omega)$ — одна точка, и из подсчета якобиана $d\pi_{=}$ в конце разд. 3 вытекает, что в окрестности ω отображение $\pi_{|\partial W_{=}^{=}}$ является диффеоморфизмом. Из стандартных фактов о степени собственных отображений (см., например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5)) вытекает, что $\deg \pi_{|\partial W_{=}^{=}} = \pm 1$, а, следовательно, $\pi_{=}(\partial W_{=}^{=}) = \Omega_{=}^{=} \setminus \{\alpha = 0\}$ и отображение $\pi_{|W_{=}^{=}} : W_{=}^{=} \to \Omega_{=}^{=}$ сюръективно. Из леммы Сарда (см., например, (Хирш, 1979, гл. 3, § 1)) следует, что, для почти всех экономик $\omega \in \Omega_{=}^{=}$, $\pi^{-1}(\omega)$ — одномерное многообразие, край которого содержится в $\partial_b W_{=}^{=}$. Поскольку число точек края нашего одномерного многообразия нечетно, соответствующее утверждение теоремы вытекает из классификации одномерных многообразий (Милнор, Уоллес, 1972, Приложение). Наконец, если распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, $\alpha_k = \langle q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$, а p_0 — минимальная равновесная цена в ω_0, для которой $p_0 \geq q$, то, рассуждая как и выше и используя следствие 1, мы видим, что ограничение π на подмногообразие $W_{=}^{=}$, задаваемое уравнением $p^1 = \lambda p_0^1$, где $\lambda > 1$ — некоторый скаляр, является диффеоморфизмом в окрестности ω_0. Следовательно, для $\omega \in \Omega_{=}^{=}$, близких к ω_0, $\pi^{-1}(\omega)$ — луч. ■

Перейдем к исследованию собственного отображения $\pi_{=}^{\leq} = \pi_{|W_{=}^{\leq}} : W_{=}^{\leq} \to \Omega_{=}^{\leq}$. Ясно, что в $W_{=}$ имеем $\partial W_{=}^{\leq} = \partial W_{=}^{=}$ (см. (15)).

Теорема 2. *Отображение $\pi_{=}^{\leq}$ сюръективно, т.е. для всякой экономики $\omega \in \Omega_{=}^{\leq}$ существует равновесная цена. Более того,* $\deg \pi_{=}^{\leq} = \pm 1$ *и почти для всех экономик $\omega \in \Omega_{=}^{\leq}$ существует нечетное число состояний равновесия (и равновесных цен). Если экономика $\omega \in \Omega_{=}^{\leq}$ близка к экономике $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=}$, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k = \langle q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$, то в ω существует единственная равновесная цена.*

Доказательство. Заметим, что $W_{=}^{\leq}$ и $\Omega_{=}^{\leq}$ — многообразия с границей размерности $lm + l + m$, причем $\partial\Omega_{=}^{\leq} = \Omega_{=}^{=} \cup \{\alpha = 0\}$ и в $W_{=}$ выполнено равенство $\partial W_{=}^{\leq} = \partial W_{=}^{=}$ (см. (15)). Пусть $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=} \setminus \pi(\partial_b W_{=}^{=})$ — экономика, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето и $\alpha_k = \langle q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$. Из теоремы 1 вытекает, что в (единственном) прообразе (ω_0, p_0) точки ω_0 в $\partial W_{=}^{=}$ отображение $d_{(\omega_0, p_0)}(\pi_{|\partial W_{=}^{=}})$ является изоморфизмом. Дифференциал $d\pi_{=}^{\leq}$ непрерывен в окрестности (ω_0, p_0) в $W_{=}^{\leq}$, и мы можем по непрерывности доопределить $d\pi_{=}^{\leq}$ в (ω_0, p_0). В частности, из (12) следует, что

$$d\pi_{=}^{\leq}\left(\frac{\partial}{\partial q^t}\right) = \frac{\partial}{\partial q^t} - \left\langle p_0 - q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t}\right\rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial x_i^j}{\partial q^t}\frac{\partial}{\partial x_i^j}, \tag{16}$$

где t — (единственный) товар, для которого $p_0^t = q_0^t$. Обозначим через ν (внешнюю) нормаль в точке ω_0 к гиперповерхности $\Omega_{=}^{=}$, задающейся в $\Omega_{=}$ уравнением $\langle q, x\rangle - \alpha = 0$. Тогда из (12) и (16) получаем

$$\left\langle \nu, d\pi_{=}^{\leq}\left(\frac{\partial}{\partial q^t}\right)\right\rangle = x_0^t + \left\langle p_0 - q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t}\right\rangle + \left\langle q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t}\right\rangle = x_0^t + \left\langle p_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t}\right\rangle = x_0^t > 0. \tag{17}$$

Следовательно, в окрестности ω_0 в $\Omega_{=}^{\leq}$ отображение $\pi_{=}^{\leq}$ является диффеоморфизмом. Из теоремы 1 и свойств степени (см., например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5)) следует, что $\deg \pi_{=}^{\leq} = \pm 1$.

Отсюда уже вытекают сюръективность $\pi^{<}_{=}$ и нечетность числа состояний равновесия. Заметим, что это же рассуждение доказывает единственность равновесной цены в окрестности ω_0, если $\omega_0 \notin \pi(\partial_b W^{=}_{=})$. Пусть теперь $\omega_0 \in \pi(\partial_b W^{=}_{=})$, так что $p_0^j = q_0^j$ при $j \in J$, $\operatorname{card} J > 1$, $p_0^j > q_0^j$ при $j \notin J$ ($\operatorname{card} J$ обозначает число элементов множества J). Тогда окрестность точки (ω_0, p_0) в $\bar{W}^{<}_{=}$ разбивается на $2^{\operatorname{card} J} - 1$ полиэдральных подмножеств вида $p^j \geq q^j$, $j \in J_+ \subsetneq J$, $p^j \leq q^j$, $j \in J_- \subset J$, $J_+ \cup J_- = J$, причем отображение $\pi^{<}_{=}$ продолжается до гладкого собственного отображения каждого из этих замкнутых подмножеств в $\bar{\Omega}^{<}_{=}$ (последнее из подмножеств, для которого $J_+ = J$, т.е. $p \geq q$ целиком отображается в $\Omega^{=}_{=}$). Ясно, что равенство (17) имеет место в точности для $t \in J_-$, а для $t \in J_+$ имеем $\langle \nu, d\pi^{<}_{=}(\partial / \partial q^t) \rangle = 0$. Более того, из (16) и вычисления якобиана в конце разд. 3 вытекает, что векторные поля $d\pi^{<}_{=}(\partial / \partial q^t + \partial / \partial p^t)$ гладки в окрестности ω_0 при всех $t \in J$, причем $\left\langle \nu, d\pi^{<}_{=}\left(\frac{\partial}{\partial q^t} + \frac{\partial}{\partial p^t}\right)\right\rangle = 0$. При этом

$$\left\langle \nu, d\pi^{<}_{=}\left(\frac{\partial}{\partial q^t} - \frac{\partial}{\partial p^t}\right)\right\rangle = \begin{cases} 0, & t \in J_+, \\ 2x_0^t > 0, & t \in J_-. \end{cases} \tag{18}$$

В частности, из (18) следует, что при $t \in J_-$ вектор $d\pi^{<}_{=}(\partial / \partial q^t)$ не лежит в $d\pi^{<}_{=}(T_{\{p^t = q^t\}})$ (здесь T обозначает касательное пространство). Проведя индукцию по $\operatorname{card} J_-$ (случай $\operatorname{card} J_- = 1$ фактически совпадает со случаем $\omega_0 \notin \pi(\partial_b W^{=}_{=})$), мы видим, что ограничение π на каждое из построенных выше замкнутых полиэдральных подмножеств в $\bar{W}^{<}_{=}$ является диффеоморфизмом в окрестности ω_0. Кроме того, из (18), (16) и аналогичной формулы для $d\pi^{<}_{=}(\partial / \partial p^t)$ следует, что ограничения $\pi^{<}_{=}$ на соседние полиэдральные подмножества (т.е. подмножества I и II такие, что $J_-(\mathrm{II}) = J_-(\mathrm{I}) \cup \{t\}$ и $J_+(\mathrm{II}) = J_+(\mathrm{I}) \setminus \{t\}$ для некоторого $t \in J_+(\mathrm{I})$) имеют одинаковые степени. Следовательно, ограничение $\pi^{<}_{=}$ на каждое из наших подмножеств имеет одну и ту же степень d и $\deg_\omega \pi^{<}_{=} = k(\omega)d$, где $k(\omega)$ — число прообразов экономики ω, близкой к ω_0. Поскольку уже доказано, что $\deg \pi^{<}_{=} = \pm 1$, отсюда следует, что $k(\omega) = 1$, $d = \pm 1$ и $\pi^{<}_{=}$ взаимно однозначен в окрестности ω_0 в $\Omega^{<}_{=}$. ■

Теорема 3. *Собственное отображение* $\pi_- : W_- \to \Omega_-$ *(где* $W_- = \pi^{-1}(\Omega_-)$*), — сюръективно, т.е. для всякой экономики* $\omega \in \Omega_-$ *существует равновесная цена. Более того,* $\deg \pi_- = \pm 1$ *и для почти всех экономик* $\omega \in \Omega_-$ *существует нечетное число равновесий. С другой стороны, собственное отображение* $\pi_+ : W_+ \to \Omega_+$ $(W_+ = \pi^{-1}(\Omega_+))$ *не является сюръективным, так что* $\deg \pi_+ = 0$ *и для почти всех экономик* $\omega \in \Omega_+$ *существует четное число равновесий. В частности, утверждения теоремы справедливы и для собственных отображений* $\pi_< : W_< \to \Omega_<$ $(W_< = \pi^{-1}(\Omega_<))$ *и* $\pi_> : W_> \to \Omega_>$ $(W_> = \pi^{-1}(\Omega_>))$.

Доказательство. Пусть $\omega_0 \in \Omega^{<}_{=} \subset \Omega_= \subset \Omega_0$ — экономика, для которой отображение $\pi^{<}_{=}$ является диффеоморфизмом и в окрестности ω_0 в $\Omega^{<}_{=}$ имеем $\pi^{-1}(\omega_0) = (\omega_0, p_0)$ (см. теорему 2). Из вычисления якобианов в конце разд. 3 вытекает, что обратимость $d\pi$ эквивалентна обратимости $d\pi_=$ (и обратимости матрицы J, см. (10) и (13)). Следовательно, π также является диффеоморфизмом в окрестности (ω_0, p_0) в W. Из следствия 3 вытекает, что ограничение π на подмножество $\{x \leqq y\}$ собственно. Рассмотрим в Ω подмногообразие Ω_J, задаваемое равенствами $x^j = y^j$ при $j \in J \subset \{1, \ldots, l\}$. Ясно, что $\dim \Omega_J = lm + 2l + m - \operatorname{card} J$, а те из формул (12), для которых $j \in J$, показывают, что $W_J = \pi^{-1}(\Omega_J)$ подмногообразие W той же размерности $lm + 2l + m - \operatorname{card} J$ (в частности, при $J = \{1, \ldots, l\}$ имеем $\Omega_J = \Omega_=$, $W_J = W_=$; эти многообразия являются наименьшими из всех Ω_J, W_J). Воспользовавшись индукцией по $l - \operatorname{card} J$ и свойствами степени (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5), мы видим, что в окрестности ω_0 в $\Omega_{\leqq}$ ограничение π на W_J является диффеоморфизмом. В частности, при $J \neq \varnothing$ получаем $\deg \pi_{|W_<} = \pm 1$. Поскольку $\Omega_<$ и $W_<$ — открытые подмножества связных многообразий Ω_- и W_- соответственно, мы заключаем, что $\deg \pi_{|W_-} = \deg \pi_< = \pm 1$, отображение π_- сюръективно, и для общей экономики $\omega \in \Omega_-$ число равновесных цен нечетно.

Рассмотрим теперь собственное отображение $\pi_+ : W_+ \to \Omega_+$. Пусть $\omega \in \Omega_> \subset \Omega_+$ — экономика, для которой

$$\alpha(\omega) > \langle q(\omega), y(\omega) \rangle. \tag{19}$$

Закон Вальраса (5) показывает, что

$$\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle - \langle (p - q)^+, x - y \rangle \leq \langle q, y \rangle \tag{20}$$

для всякой равновесной цены p в ω. Противоречие между (19) и (20) означает, что в экономике ω не существует равновесных цен. Следовательно, $\deg \pi_> = \deg \pi_+ = 0$, и для почти всех экономик существует четное число равновесных цен. ■

Следствие 4. При $\alpha > 0$ в экономике с фиксированными доходами ($x = 0$) существует равновесная цена. При этом для почти всех экономик с фиксированными доходами число равновесных цен нечетно.

Доказательство. Следствие немедленно вытекает из теоремы 3 и предложения 1. ■

Замечание 8. Существование равновесия в экономиках с фиксированными доходами давно и хорошо известно (см., например, более общий результат (Полтерович, 1990, теорема 2, гл. 2)). Однако нечетность числа равновесных цен в общей экономике с фиксированными доходами до сих пор не была известна.

Замечание 9. Пусть $\omega \in \Omega_{\leqq}$ (т.е. $x(\omega) \leqq y(\omega)$, $\alpha > 0$; ср. следствие 3), и пусть p — равновесный вектор цен в ω, для которого $p \geq q$. Тогда $\alpha \geq \langle q, y\rangle \geq \langle q, x\rangle$, причем если $\alpha = \langle q, y\rangle$, то $p^j = q^j$ при $y^j > x^j$. В частности, если $\alpha = \langle q, y\rangle$, $x < y$, то $p = q$, а если $\alpha = \langle q, x\rangle$, то $x = y$.

Доказательство. Согласно закону Вальраса (5) $\alpha = \langle p \wedge q, y\rangle + \langle (p-q)^+, y-x\rangle = \langle q, y\rangle + \langle p-q, y-x\rangle$. Из условия вытекает, что $\langle p-q, y-x\rangle \geq 0$, причем равенство имеет место, если и только если $p^j = q^j$ при $y^j > x^j$. Если $\alpha = \langle q, x\rangle$, то $\langle q, x\rangle = \langle q, y\rangle$, т.е. $q^j = 0$ при $y^j > x^j$. Поскольку для таких j выполнено равенство $p^j = q^j$, отсюда следует, что $y = x$. ■

Следствие 5. Предположим, что экономика $\omega \in \Omega_{\leq}$ близка к экономике $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=}$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0)\rangle$, $k = 1,\ldots,m$, причем $\alpha < \langle q, y\rangle$. Тогда в ω существует единственный равновесный вектор цен p, причем $p \not\geq q$ и цены p^j ограничены, $j = 1,\ldots,l$.

Доказательство. Существование вытекает из теоремы 3. При $x = y$ единственность была доказана в теореме 2. Следствие 5 вытекает из доказательства этой теоремы, следствия 3 и замечания 9. ■

Замечание 10. Более общо доказательство следствия 4.7 показывает, что для каждой экономики $\omega \in \Omega$ из достаточно малой окрестности экономики $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=}$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0)\rangle$, $k = 1,\ldots,m$, существует не более одного равновесного вектора цен p такого, что $p \not\geq q$. При этом знак якобиана $\det d_{(\omega,p)}\pi$ отображения π в точке p (совпадающий со знаком $\det J$, см. (13)) такой же, как знак $\deg \pi_-$ (напомним, что, по теореме 3, $\deg \pi_- = \pm 1$).

Теорема 4. $\deg \pi_- = (-1)^l$. *Более того, пусть $\omega \in \Omega_-$ — экономика, близкая к экономике $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=}$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0)\rangle$, $k = 1,\ldots,m$. Тогда при $\alpha - \langle q, x\rangle \leq 0$ в ω существует единственный равновесный вектор цен p, причем $p \not\geq q$. Если выполнено одно из условий:*

а) $x \leq y$;

б) $\alpha_k \geq \langle q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$,

то в ω существует единственный равновесный вектор цен p.

Доказательство. Предположим, что $p \geqq q$ — равновесный вектор цен в ω, и пусть $\bar\omega \in \Omega_{=}^{=}$ — экономика, для которой $q(\bar\omega) = q$, $x_k(\bar\omega) = y_k = f_k(p, \alpha_k + \langle p-q, x_k\rangle)$, $\alpha_k(\bar\omega) = \langle q, y_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$. Тогда $\bar\omega$ близка к ω_0, p — (единственный с точностью до множителя) равновесный вектор цен в $\bar\omega$, $\langle p, y_k\rangle = \alpha_k + \langle p-q, x_k\rangle$, $k = 1,\ldots,m$ и матрица

$$\bar J^*_{jr} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_k^j}{\partial p^r} + \frac{\partial f_k^j}{\partial w_k} y_k^r \right)$$

(сравни с (11)) симметрична и полуотрицательно определена в точке $(p, \langle p, y_1\rangle, \ldots, \langle p, y_m\rangle)$, причем $\operatorname{Ker} \bar J^* = \{p\}$ (тождество Эйлера). Таким образом, 0 — собственное значение матрицы $\bar J^*$ кратности один. Пусть

$$J^*_{jr} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_k^j}{\partial p^r} + \frac{\partial f_k^j}{\partial w_k} x_k^r \right)$$

(производные берутся в точке $(p, \alpha_1 + \langle p-q, x_1\rangle = \langle p, y_1\rangle, \ldots, \alpha_m + \langle p-q, x_m\rangle = \langle p, y_m\rangle)$, сравни с (10) и (11)). Тогда J^* получается малой деформацией из $\bar J^*$, а $\det_{(\omega,p)} d\pi$ равен детерминанту J^*. Знак $\det J^*$ определяется знаком вещественного собственного значения λ матрицы J^*, деформирующегося в 0 и, следовательно, близкого к 0, причем кратность λ равна единице. Пусть e — собственный вектор J^*, соответствующий собственному значению λ; мы можем считать, что e близок к p. Тогда

$$\langle J^* e, p\rangle = \langle e, Jp\rangle = \langle e\bar J, p\rangle - \langle e, \Delta p\rangle, \tag{21}$$

где $\Delta_{jr} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k^r}{\partial w_k}(y_k^j - x_k^j)$, и следовательно

$$Jp = -\Delta p = -\sum_{k=1}^{m} \left\langle \frac{\partial f_k}{\partial w_k}, p \right\rangle (y_k - x_k) = -(y - x) \tag{22}$$

(последнее равенство вытекает из условия агрегации Энгеля). Поскольку $\bar{J}$ симметричная матрица, $\bar{J}p = 0$ (это условие агрегации Курно). Из (21) и (22) следует, что

$$\left\langle J^* e, p \right\rangle = -\left\langle e, \Delta p \right\rangle = -\left\langle e, y - x \right\rangle. \tag{23}$$

Поскольку e близко к p и, следовательно, $e > 0$, при выполнении условия а) из (23) вытекает, что $\lambda = \left\langle J^* e, p \right\rangle / \left\langle e, p \right\rangle < 0$. Далее, если e' — собственный вектор J, близкий к p и соответствующий собственному значению λ (это общее собственное значение J и J^*), то

$$\begin{aligned} \lambda \left\langle e', p \right\rangle &= \left\langle Je', p \right\rangle = \left\langle e', J^* p \right\rangle = \left\langle e', \bar{J}^* p - \Delta^* p \right\rangle = -\left\langle e', \Delta^* p \right\rangle = \\ &= -\sum_{k=1}^{m} \left\langle e', \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right\rangle \left\langle p, y_k - x_k \right\rangle = -\sum_{k=1}^{m} \left\langle e', \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right\rangle (\alpha_k - \left\langle q, x_k \right\rangle). \end{aligned} \tag{24}$$

Из (24) и условия агрегации Энгеля вытекает, что при выполнении условия б) $\lambda = \langle Je', p \rangle / \langle e', p \rangle < 0$. Итак, если выполнено условие а) или условие б), то во всех прообразах ω, для которых $p \geqq q$, якобиан π имеет один и тот же знак $(-1)^l$. Из теоремы 3, следствия 5 и замечания 10 теперь вытекает, что при выполнении условия а) и/или условия б) в ω существует единственная равновесная цена. Кроме того (уже без всяких дополнительных предположений), мы доказали, что

$$\deg \pi = (-1)^l \tag{25}$$

(в теореме 3 было показано только, что $\deg \pi = \pm 1$).

Для доказательства теоремы 4 осталось проверить, что если $\alpha - \langle q, x \rangle \leq 0$, то $p \ngeqq q$. Предположим противное. Из закона Вальраса вытекает, что

$$\left\langle Jp, p \right\rangle = -\left\langle p, y - x \right\rangle = -(\alpha - \left\langle q, x \right\rangle). \tag{26}$$

Если $\alpha - \langle q, x \rangle < 0$, то (26) показывает, что $\langle Jp, p \rangle > 0$, и следовательно $\langle Je', e' \rangle > 0$ и $\lambda > 0$. Если $\alpha - \langle q, x \rangle = 0$, то $\langle Jp, p \rangle = 0$, и следовательно $\langle Je', e' \rangle \geq 0$ и $\lambda \geq 0$. Докажем, что и в этом случае $\lambda > 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $\langle Je', e' \rangle = \langle Jp, p \rangle = 0$, и из теоремы инерции вытекает, что мы можем считать, что $e' = p$. Из (22) следует, что

$$0 = Je' = Jp = -(y - x). \tag{27}$$

Другими словами, (27) означает, что если $\alpha - \langle q, x \rangle = \lambda = 0$, то $y = x$ вопреки тому, что $\omega \in \Omega_-$. Итак, если $\alpha - \langle q, x \rangle \leq 0$, то

$$\lambda > 0, \quad \operatorname{sign}(\det J) = (-1)^{l-1}, \tag{28}$$

что противоречит замечанию 10 и уже доказанному равенству (25). Итак, если $p \geq q$, то $\alpha - \left\langle q, x \right\rangle > 0$. ■

Стандартный вальрасовский процесс регулирования цен (tâtonnement) заключается в повышении цен на дефицитные товары и понижении на избыточные. Этот процесс описывается дифференциальным уравнением

$$dp / dt = E(p), \tag{29}$$

где t — время, а $E(p) = \sum_{k=1}^{m} f_k(p, \alpha_k + \langle (p - q)^+, x_k \rangle) - y$ — функция избыточного спроса. Сходится ли процесс (29) к равновесной цене, зависит как от функций спроса f_i и экономики $\omega \in \Omega$, так и от начального вектора цен p_0. Если сходимость имеет место при p_0, достаточно близком к равновесной цене, то процесс ценообразования называется *локально асимптотически устойчивым*, если же процесс сходится независимо от выбора p_0, то говорят о *глобальной асимптотической устойчивости*.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 или теоремы 2 единственное равновесие в экономике* ω *локально асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие а) или б) теоремы 4, то $p \geqq q$ и из доказательства этой теоремы вытекает, что все собственные значения матрицы $J = \partial E / \partial p$ имеют отрицательные вещественные части (в обозначениях доказательства теоремы 4 выполнено неравенство $\lambda < 0$, а для остальных собственных значений этот факт вытекает из условия Слуцкого и непрерывности). Таким образом, в этом случае утверждение теоремы вытекает из теоремы Ляпунова. Аналогично, если $p \ngeq q$, $J_{-} = \{j \mid p^j \leq q^j\}$, $\operatorname{card} J_{-} \geq 1$ (см. доказательство теоремы 2), то достаточно установить отрицательность вещественных частей собственных значений матрицы $J = \partial E / \partial p$. Сделать это можно воспользовавшись индукцией по $\operatorname{card} J_{-}$ (этот метод уже был использован при доказательстве теоремы 2), тем обстоятельством, что в ω_0 для произвольной равновесной цены матрица J имеет $l-1$ отрицательных собственных значений, и теоремой 4, согласно которой $\operatorname{sign} \det J = (-1)^l$, поскольку при переходе через грань любого из полиэдральных подмножеств разбиения, рассмотренного в доказательстве теоремы 2, изменяется не более чем одно собственное значение матрицы J. ■

Поскольку наша модель включает в качестве частных случаев модель экономики с фиксированными доходами и модель чистого обмена, в общем случае нельзя ожидать единственности равновесной цены или устойчивости процесса ценообразования. Однако, как и в упомянутых выше частных случаях, наша модель обладает указанными выше свойствами для некоторых специальных функций спроса.

Теорема 6. *Пусть все участники имеют (нестрого) нормальный спрос (т.е. $\partial f_k / \partial w_k \geq 0$, $k = 1,\ldots,m$), а функция совокупного спроса удовлетворяет условию (слабой) валовой заменимости (т.е. $\partial f^j(p, w_1,\ldots,w_m) / \partial p^r \geq 0$ при $j \neq r$). Предположим, что для экономики $\omega \in \Omega_{-}$ выполнено одно из условий*:

а) $x < y$;

б) $\alpha_k > \langle q, x_k \rangle$, $k = 1,\ldots,m$, *а спрос хотя бы одного из участников строго нормален (т.е. $\partial f_i / \partial w_i > 0$ для некоторого i, $1 \leq i \leq m$);*

а′) $x \leqq y$ *и имеет место сильная валовая заменимость (т.е. $\partial f^j / \partial p^r > 0$ при $j \neq r$);*

б′) $\alpha_k \geq \langle q, x_k \rangle$, $k = 1,\ldots,m$ *и имеет место сильная валовая заменимость (условие сильной валовой заменимости в а′), б′) можно заменить условием неразложимости матрицы ($\partial f / \partial p + \lambda\, \mathrm{id}$) при $\lambda \gg 0$). Тогда в экономике ω существует единственное равновесие, являющееся к тому же глобально асимптотически устойчивым.*

Если вдобавок $\alpha < \langle q, x \rangle$, то утверждение теоремы в случае а′) остается справедливым и при $y = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема доказывается аналогично (Зак, 1981, теорема 4.11). Как мы уже отмечали при доказательстве теоремы 4, для каждой равновесной цены p в экономике ω имеем:

$$(-Jp)^r = y^r - \delta_r x^r, \tag{30}$$

$$(-J^* p) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \left(\alpha_k - \sum_{j=1}^{l} q^j x_k^j \delta_j \right), \tag{31}$$

где δ_j определено в конце разд. 3. По условию $(-J)_{jr} \leq 0$ при $j \neq r$, и в случае а) формула (30) показывает, что $(-J)_{rr} > 0$ и $-J$ — матрица с доминирующей диагональю, удовлетворяющая условию Хокинса–Саймона. Следовательно,

$$J^{-1} \leq 0, \quad (-1)^l \det J > 0 \tag{32}$$

(см. (Никайдо, 1972, гл. II, теорема 6.1)). Совершенно аналогично доказывается, что (32) имеет место также при выполнении условия б). Докажем, что соотношение (32) выполняется и в случаях а′) и б′). Действительно, предположим, что матрица J необратима. Тогда из теоремы Перрона–Фробениуса вытекает, что существуют положительные векторы e и e' такие, что $J^* e = J e' = 0$, так что $\langle e, Jp \rangle = \langle e', J^* p \rangle = 0$ вопреки (30) и (31). Таким образом, мы доказали, что в условиях теоремы 6 имеют место соотношения (32). Из (25) вытекает, что при наших предположениях существует единственное равновесие. Теорема Перрона–Фробениуса показывает, что все собственные значения матрицы J имеют отрицательные вещественные части, а следовательно, единственное состояние равновесия в ω устойчиво. ■

Теорема 3 показывает, что какие бы ограничения ни накладывать на функции спроса, при $\omega \in \Omega_{+}$ нельзя, вообще говоря, ожидать существования равновесия. Тем не менее, для некоторых экономик ω равновесие все же существует, и мы даже можем подсчитать количество равновесных векторов цен.

Теорема 7. *Пусть $\omega \in \Omega_{=}^{<}$ — регулярная экономика, в которой существует $2n+1$ равновесных цен ($n \geq 0$; см. теорему 2), и пусть U — достаточно малая окрестность ω в Ω. Тогда при $\omega' \in \Omega_{+} \cap U$ в ω' существует $2n+1$ равновесных векторов цен $p_r(\omega') \ngeq q(\omega')$, $r = 1,\ldots,2n+1$ и, по меньшей мере, один равновесный вектор цен $p(\omega') \geq q(\omega')$, причем, если $\omega' \to \omega$, то для каждого равновесного вектора цен $p(\omega') \geq q(\omega')$ имеем $p^j(\omega') \to \infty$, $j = 1,\ldots,l$.*

Если $\omega_0 \in \Omega_{=}^{=}$ — экономика, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0)\rangle$, $\omega \in \Omega_{=}^{<}$ — экономика, близкая к ω_0, а ω' — экономика, близкая к ω, то при $\omega' \in \Omega_-$ в ω' существует единственный равновесный вектор цен $p(\omega') \not\geq q(\omega')$, близкий к $p(\omega)$, а при $\omega' \in \Omega_+$ в ω' существуют два равновесных вектора цен, а именно $p_-(\omega') \not\geq q(\omega')$, близкий к $p(\omega)$, и $p_+(\omega') > q(\omega')$, все компоненты которого велики.

Доказательство. Из (10) и (13) вытекает, что ω — регулярная экономика в Ω, а из замечания 9 — что в ω не существует равновесных цен $p \geq q$. Из леммы 2 следует, что, для достаточно большого вектора P, в окрестности ω отображение $\pi_{|W\cap\{p\leqq P\}}$ является неразветвленным $(2n+1)$-листным накрытием. В частности, $(\pi_{|W\cap\{p\leqq P\}})^{-1}(\omega) = \pi^{-1}(\omega)$, и если ω' достаточно близка к ω, то $\mathrm{card}(\pi_{|W\cap\{p\leqq P\}})^{-1}(\omega') = 2n+1$ и соответствующие равновесные цены $p_r(\omega')$ удовлетворяют соотношению $p_r(\omega') \not\geq q(\omega')$, $r = 1,\ldots,2n+1$. Поскольку $\deg \pi_+ = 0$ (см. теорему 3), ценами $p_r(\omega')$, $r = 1,\ldots,2n+1$ не исчерпываются равновесные цены в экономике ω', т.е. существует равновесный вектор цен $p(\omega') \geq q(\omega')$. Из замечания 9 и леммы 2 вытекает, что при $\omega' \to \omega$ имеем $p^j(\omega') \to \infty$, $j = 1,\ldots,l$.

Предположим теперь, что ω близка к ω_0. Из теоремы 2 вытекает, что в ω' существует единственный равновесный вектор цен $p_-(\omega')$, удовлетворяющий соотношению $p_-(\omega') \not\geq q(\omega')$, а из (25) следует, что знак соответствующего якобиана равен $(-1)^l$. Пусть $p_+(\omega') \geq q(\omega')$ — равновесный вектор цен в ω'. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, мы видим, что из условия $\alpha(\omega') - \langle q(\omega'), x(\omega')\rangle < 0$ вытекает, что знак якобиана в точке (ω', p_+) равен $(-1)^{l-1}$ (см. (28)). Из теоремы 3 вытекает, что при $\omega' \in \Omega_+$ существует единственный вектор p_+, а при $\omega' \in \Omega_-$ такого p_+ не существует.

Замечание 11. Очевидно, что равновесие p_- устойчиво, а равновесие p_+ неустойчиво.

До сих пор мы исследовали устойчивость процесса ценообразования для экономики $\omega \in \Omega$ в случае, когда в ω существует единственная равновесная цена. Мы уже отмечали, что особый интерес представляют экономики $\omega \in \Omega_{=}^{=}$, т.е. экономики, для которых $y = x$, $\alpha = \langle q, x\rangle$. Согласно теореме 1 для общей экономики $\omega \in \Omega_{=}^{=}$ множество равновесных цен одномерно.

Ниже мы приведем результаты об устойчивости процессов ценообразовании для таких экономик (доказательства аналогичны доказательствам теорем 5 и 6). При этом мы будем пользоваться интерпретацией таких экономик, данной во введении: государство обязывает участника i, обладающего начальным запасом y_i, предложить участнику k набор продуктов y_{ik}, $i, k = 1,\ldots,m$ по фиксированным ценам q, после чего происходит торговля всеми товарами по рыночным ценам p. Положим $\alpha_i = \langle q, y_i\rangle$, $x_i = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = \sum_{k=1}^{m}(y_{ki} - y_{ik})$.

Согласно теореме 1, если распределение $\{x_i\}$ близко к оптимальному по Парето, то множество равновесных цен состоит из подмногообразия, диффеоморфного лучу, и нескольких дуг, а если к тому же стоимости предписанных государством поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_i\rangle|$, $i = 1,\ldots,m$ невелики, то множество равновесных цен диффеоморфно лучу. Естественно считать, что, распределяя квоты, государство пытается перевести экономику в состояние, близкое к Парето-оптимальному, но результирующее равновесное распределение (также Парето-оптимальное) варьируется вдоль равновесного луча и может отклониться от запланированного распределения $\{x_i\}$. Однако по мере того как равновесные цены неограниченно растут, соответствующее равновесное распределение стремится к равновесию в экономике чистого обмена с начальными запасами $\{x_k\}$, которое, при наших предположениях, единственно и мало отличается от $\{x_k\}$. Ясно, что при этом некоторые участники выигрывают от повышения цен вдоль равновесного луча, а другие проигрывают.

Теорема 8. *Предположим, что распределение $\{x_i\} = \{y_i + \Delta y_i\}$ близко к Парето-оптимальному и выполнено одно из следующих условий*:

а) *начальный вектор цен p_0 достаточно велик;*

б) *стоимости предписанных государством поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_i\rangle|$, $i = 1,\ldots,m$ достаточно малы.*

Тогда стандартный процесс ценообразования (tâtonnement) локально асимптотически устойчив, а если функция избыточного спроса $E(p)$ удовлетворяет условию валовой заменимости, то и глобально устойчив.

Напомним, что стандартный вальрасовский процесс (tâtonnement) устойчив к инфляции, поскольку, в силу закона Вальраса, $d\langle p(t), p(t)\rangle / dt = 2\langle d\,p(t)/dt, p(t)\rangle = 0$. Поэтому в нашей ситуации можно надеяться на сходимость этого процесса, только если начальный вектор цен достаточно велик. Но если в модели чистого обмена естественно предположить, что ценообразующий орган беспристрастен, в нашей модели государство осуществляет активную распределительную политику и правдоподобным выглядит предположение, что оно приписывает индивидуальным функциям избыточного спроса некоторые веса. Это приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = E_\mu(p) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i E_i(p), \tag{33}$$

где $\mu_i > 0$, а $E_i(p) = f_i(p, \langle p, x_i \rangle - \langle q, \Delta y_i \rangle) - x_i$, $(p \geqq q)$ — функция избыточного спроса участника i по завершении плановых поставок. Представляется разумным выбрать веса μ_i в зависимости от взаимных поставок, а именно вес нетто-потребителя $(\langle q, \Delta y_i \rangle > 0)$ должен быть меньше, чем у нетто-поставщика $(\langle q, \Delta y_i \rangle < 0)$. Более общо, можно предположить, что вес — убывающая функция от $\langle q, \Delta y \rangle$, т.е. если

$$\langle q, \Delta y_{i_1} \rangle \le \langle q, \Delta y_{i_2} \rangle \le \ldots \le \langle q, \Delta y_k \rangle \le 0 < \langle q, \Delta y_{i_{k+1}} \rangle \le \ldots \le \langle q, \Delta y_{i_m} \rangle,$$

то $\mu_{i_1} \ge \mu_{i_2} \ge \ldots \ge \mu_{i_m} > 0$ и $\mu_{i_a} \ne \mu_{i_b}$ при $\langle q, \Delta y_{i_a} \rangle \ne \langle q, \Delta y_{i_b} \rangle$.

При указанных выше условиях для функции $E_\mu(p)$ соотношение Вальраса не выполняется, и на траекториях нашего процесса ценообразования цены растут: $d\langle p(t), p(t) \rangle / dt > 0$. В общем случае линейная система $dp/dt = E_\mu(p)$ не имеет устойчивых решений в окрестности равновесных цен, но если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, а p достаточно большой равновесный вектор цен, то $\| E_\mu(p) \|$ мало.

Теорема 9. *Предположим, что все участники имеют нормальный спрос, удовлетворяющий условию валовой заменимости. Тогда процесс ценообразования (33) глобально устойчив, длина вектора $p(t)$ неограниченно возрастает, а нормализованный вектор цен сходится к решению системы уравнений $\sum_{i=1}^{m} \mu_i (f_i(p, \langle p, x_i \rangle) - x_i) = 0$. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному или все веса μ_i близки к 1, то предельный нормализованный вектор цен близок к равновесному вектору цен в модели чистого обмена с начальными запасами $\{x_i\}$, который, в свою очередь, является пределом нормализованных равновесных векторов цен в нашей модели.*

Отметим, что поскольку функции спроса однородны степени ноль, наши результаты в случае $x = y$, $\langle q, x \rangle = \alpha$ было бы более естественно формулировать, используя *проективное пространство цен*, в котором бесконечно удаленная гиперплоскость параметризует равновесные цены в экономиках чистого обмена.

Отличие нашей модели от модели чистого обмена состоит в том, что в последней *индивидуальные* функции избыточного спроса $E_i(p)$ удовлетворяют закону Вальраса, и для взвешенной функции избыточного спроса $d\| p(t) \|^2 / dt = 2\langle p, E_\mu(p) \rangle = 0$, т.е. евклидова длина вектора цен постоянна вдоль траектории. В нашей же модели разумный выбор весов приводит к эндогенной инфляции, связанной с процессом ценообразования, темп которой зависит от весов μ_i и нетто-поставок Δy_i по твердым ценам. Теорема 9 показывает, что при определенных условиях этот тип инфляции может играть положительную роль, помогая (хотя бы приблизительно) сбалансировать рынок.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

События последнего времени поубавили рыночного оптимизма у экономистов. На фоне ужесточающихся социальных, экономических, экологических и политических ограничений во многих странах возрастает государственное вмешательство в ценообразование и распределение ресурсов. В настоящей работе исследована модель, в которой часть товаров в пределах квот распределяется по жестким ценам, а оставшиеся товары продаются по рыночным ценам, по которым можно также перепродать квотированные товары. При определенных значениях параметров эта модель включает классические модели чистого обмена и фиксированных доходов, причем в последнем случае удается получить и новый результат. Подробное исследование существования и свойств равновесий в зависимости от параметров модели показывает, что пространство параметров разбивается на области, в некоторых из которых модель ведет себя по классическому сценарию (в общей экономике нечетное число равновесных цен, в окрестности Парето-оптимального распределения имеется единственное равновесие, устойчивое к tâtonnement, и т.д.), а в других свойства равновесий необычны (в общей экономике число равновесий четно, а в окрестности Парето-оптимальной имеется два равновесия, одно из которых устойчиво, а второе нет). Необычны также свойства равновесий в случае полного рационирования с учетом доходов потребителей — в этой ситуации множество равновесий в общей экономике одномерно, а при некоторых предположениях процесс ценообразования сходится, но приводит к неограниченному росту цен (эндогенной инфляции).

В данной работе мы сосредоточились только на распределении продуктов, производство не рассматривалось. Кроме того, модель статична. С одной стороны, эти ограничения позволили довольно полно исследовать качественные свойства равновесий, но с другой — удалили модель от реальной экономики. Учитывая возрастающий дефицит ряда ресурсов и распространяющиеся попытки ввести рационирование и ограничить цены, а также необычные свойства состояний равновесия, выявленные в настоящей работе, представляется целесообразным продолжить исследование этого круга вопросов как на модельном уровне, так и на основе изучения опыта использования инструментов рационирования и ограничения или субсидирования цен в разных странах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Зак Ф.Л. (1981). Устойчивость экономического равновесия. Методы теории экстремальных задач в экономике. В.Л. Левин (ред.). М.: Наука. С. 72–106. [**Zak F.L.** (1981). *Stability of economic equilibrium. Methods of the theory of extreme problems in economics*. Moscow: Nauka, 72–106 (in Russian). English translation: **Zak F.L.** (2006). Stability of economic equilibrium. Methods of the theory of extreme problems in economics. In: *Russian contributions to game theory and equilibrium theory*. Berlin–Heidelberg: Springer, 181–216.]

Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев Н.А., Маракулин В.М. (1982). О некоторых проблемах и результатах в современной математической экономике // *Оптимизация*. № 30 (47). С. 5–86. [**Makarov V.L., Vasil'ev V.A., Kozyrev N.A., Marakulin V.M.** (1982). On some problems and results in modern mathematical economics. *Optimization,* 30 (47), 5–86 (in Russian).]

Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев Н.А., Маракулин В.М. (1986). Равновесие, рационирование и устойчивость // *Оптимизация*. № 38 (55). С. 7–120. [**Makarov V.L., Vasil'ev V.A., Kozyrev N.A., Marakulin V.M.** (1986). Equilibrium, rationing, and stability. *Optimization,* 38 (55), 7–120 (in Russian).]

Милнор Дж., Уоллес А. (1972). Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир. [**Milnor J., Wallace A.** (1972). *Differential topology. Beginner's course*. Moscow: Mir (in Russian).]

Никайдо Х. (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. Пер. с англ. М.: Мир. [**Nikaido H.** (1972). *Convex structures and economic theory*. Moscow: Mir. First published in English in 1969 as: *Mathematics in Science and Engineering,* 51. New York: Academic Press.]

Полтерович В.М. (1990). Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. Москва: Наука. [**Polterovich V.M.** (1990). *Economic equilibrium and economic mechanism*. Moscow: Nauka (in Russian).]

Рохлин В.А., Фукс Д.Б. (1977). Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука. [**Rokhlin V.A., Fuks D.B.** (1977). Beginner's course in topology. Geometric chapters. Moscow: Nauka (in Russian). English translation as: **Fuks D., Rokhlin V.** (1984). Beginner's course in topology. Berlin–Heidelberg–N.Y. — Tokyo: Springer Verlag.]

Хирш М. (1979). Дифференциальная топология. Пер. с англ. М.: Мир. [**Hirsch M.** (1979). Differential topology. Moscow: Mir. First published in English in 1976 as: *Differential topology*. *Graduate Texts in Mathematics*, 33. N.Y.: Springer Verlag.]

Balasko Y. (1975). Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory. *J. Math. Economics,* 2, 2, 95–118.

Checherita-Westphal C., Freier M., Muggenthaler Ph. (2022). Euro area fiscal policy response to the war in Ukraine and its macroeconomic impact. *ECB Economic Bulletin*, 5. Available at: Euro area fiscal policy response to the war in Ukraine and its macroeconomic impact. Available at: https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-bulletin/focus/2022/html/ecb.ebbox202205_07~6db6f2c297.en.html

Debreu G. (1970). Economies with a Finite Set of Equilibria. *Econometrica,* 38, 387–392.

Debreu G. (1972). Smooth Preferences. *Econometrica,* 40, 603–616.

EC (2023). *Impact of Russia's invasion on the markets: EU response*. Consilium. Available at: https://www.wsj.com/articles/russias-war-in-ukraine-to-cost-global-economy-2-8-trillion-oecd-says-11664177401

Hannon P. (2022). Russia's war in Ukraine to cost global economy $2.8 trillion, OECD says. *The Wall Street Journal*, Sept. 26.

Kornai J. (1980). *The Economics of Shortage*. Amsterdam: North Holland.

Kornai J. (2013). *Dynamism, rivalry, and the surplus economy. Two essays on the nature of capitalism*. Oxford: Oxford University Press.

Merrill R., Neves C., Lain B. (2022). *Basic income experiments. A critical examination of their goals, contexts, and methods*. Palgrave Macmillan, Springer Nature Switzerland AG.

Torry M. (2022). *Basic income — What, why, and how? Aspects of the Global Basic Income Debate*. Palgrave Macmillan, Springer Nature Switzerland AG.

Rationing and market: Structure and stability of equilibria

F.L. Zak,
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia; e-mail: zak@cemi.rssi.ru

Received 15.12.2022

Abstract. In recent years, state control of the economy has increased in many countries. A number of states try to influence prices in key areas of economy, in particular by selling resources at fixed prices within given quotas. However, in real economies the governments cannot prevent economic agents from reselling rationed goods at the free market. The study of impact of rationing on the market prices is a difficult and challenging problem. In the present paper we consider an equilibrium model in which part of the goods within the limits of quotas is sold at fixed prices while the remaining goods are sold at market prices; the goods bought at fixed prices can also be resold at market prices. Economy depends on parameters, viz. total resources, incomes of the participants, quotas, and fixed prices. For special values of parameters, this model reduces to pure exchange and fixed income models and, in a sense, is a combination of these models. Basing on known properties of these special cases and using techniques of elementary differential topology, we study the existence of equilibria and their properties. Depending on the values of parameters, a (sufficiently general) economy may have a finite (even or odd) number of equilibria, and in an important special case when total resources are subject to rationing and the total cost of allocated quotas coincides with the total income of the participants the equilibria form a one-dimensional manifold. We consider a generalized tâtonnement process and study its convergence under certain assumptions. It is shown that in our setup convergence of tâtonnement to an equilibrium may involve endogenous inflation.

Keywords: deficit, rationing, quotas, demand functions, market, equilibrium, Walras correspondence, tâtonnement, inflation.

JEL Classification: C02, C62, C65, D31, D45, D47, D52, D61.

For reference: **Zak F.L.** (2023). Rationing and market: Structure and stability of equilibria. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 68–86. DOI: 10.31857/S042473880025860-5