ческие формулы. Наибольшие трудности возникают, как правило, на первом этапе. Не вдаваясь в детали, скажем, что подходящий путь интегрирования должен проходить через точку перевала z_0, где производная $u'(z_0) = 0$, а в других точках контура должно выполняться условие $Re u(z) < Re u(z_0)$. Название «точка перевала» связано с геометрической иллюстрацией метода. Если рассмотреть в трехмерном пространстве поверхность $t = Re u(z)$, то точки, в которых $u'(z) = 0$, являются седловыми и напоминают горные перевалы. Часто используются и другие географические названия, так говорят о «холмах» и «долинах», хотя в силу принципа максимума модуля рассматриваемая поверхность не имеет вершин. Кривые на плоскости z, вдоль которых $Re u(z)$ сохраняет постоянное значение, называются линиями уровня поверхности $t = Re u(z)$, линии, вдоль которых $\operatorname{Im} u(z)$ постоянна, а $Re u(z)$ убывает, называют линиями наибыстрейшего спуска или линиями стока. Линии уровня разделяют окрестность точки перевала на «долины» (где $Re u(z) < Re u(z_0)$) и «холмы» (где $Re u(z) > Re u(z_0)$).

При такой интерпретации наша задача оценки интеграла состоит в отыскании пути, ведущего из одной «долины» в другую через «перевал». Наилучшим будет наиболее крутой путь, то есть тот, который проходит через точку «перевала» по линии наибыстрейшего спуска.

Можно говорить о том, что первые подходы к методу перевала были у Коши (подробнее см. [6]). Риман был первым, кто ясно понял, что такое метод перевала (то есть обратил внимание на проблему выбора контура) и реализовал его на частном примере оценки гипергеометрической функции. Сделано это было в 1863 г., когда он уже очень болел. Заметка Римана, содержавшая практически одни формулы, была опубликована в 1876 г. после его смерти с комментариями и реконструкциями Г. Шварца [1]. Подтверждением тому, что Риман понимал до мелочайших тонкостей процедуру применения метода перевала, служит асимптотическая оценка функции $Z(t)$, связанной со знаменитой дзета-функцией Римана, найденная Зигелем в 1932 г. в бумагах Римана [7].

Метод перевала у Некрасова появляется в 3-й главе его докторской диссертации «Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел» [8], опубликованной впоследствии отдельно в 12 томе «Математического сборника» [9].

Как известно, проблема определения радиуса сходимости ряда Лагранжа приводит к оценке коэффициентов этого ряда, представленных интегралами вида (1). Работы Римана Некрасов не знал. По его словам, он опирался на идеи Коши из его забытой к тому времени работы.

Некрасов оценивает интеграл

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F'(z) \frac{\varphi^n(a + z)}{nz^n} dz, \tag{2}$$

взятый по замкнутому контуру C, предполагая, что функция $f(z) = \dfrac{\varphi(a + z)}{z}$ мероморфная, то есть имеет только полюса. В конце работы он рассматривает и случай существенно особой точки и точек ветвления.

Свой анализ Некрасов начинает с выбора контура, показывая, что всегда существует контур, обходящий начало координат, не содержащий внутри себя особых точек функции $\varphi(a + z)$ и проходящий по направлению наибыстрейшего спуска через точки перевала, в которых

$$\left| f(z) \right| = \left| \frac{\varphi(a + z)}{z} \right|$$

имеет одно и то же наибольшее на этом контуре значение. Для доказательства этого он использует весьма оригинальные геометрические рассуждения, ставшие впоследствии мехматским фольклором, которые коротко можно изложить так: представим себе горизонтальную комплексную плоскость, над которой построен график функции $|f(z)|$. Эта поверхность не имеет вершин, а только седловые точки, в которых $f'(z) = 0$. В полюсах она имеет пики, уходящие в бесконечность. Если на плоскость налить воду до очень высокого уровня, то выше этого уровня будут находиться только маленькие области кругового вида, соответствующие полюсам. Будем следить за областью, окружающей начало координат. Начнем понижать уровень воды, тогда указанные области будут монотонно расширяться и в какой-то момент область, окружающая начало координат, коснется одной или нескольких рассматриваемых областей. Некрасов показывает, что подходящий контур содержит область с началом координат и проходит через все точки касания, которые, очевидно, будут точками перевала наибольшей высоты, причем в окрестности каждой такой точки контур проходит по линии наибыстрейшего спуска.

Из-за недостатка места не имея возможности показать, как оценивает затем Некрасов интеграл (2), отметим только, что в отличие от Коши и Римана, а также позднейших авторов,

Некрасов и здесь применяет оригинальный прием и сводит эту оценку не к вычислению интеграла от экспоненты, а к другому интегралу, выражающемуся через гамма-функцию.

Как указал Е. Сенета [4], в 1898 г. Некрасов использовал метод перевала [10] для нахождения вероятностей больших уклонений в доказательстве центральной предельной теоремы локального типа. Серьезно этой тематикой стали заниматься лишь в 40-е годы XX в.

Как уже упоминалось, в 1909 г. Дебай, следуя Риману, применил метод перевала к асимптотической оценке цилиндрических функций, являющихся решениями дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{x}u'\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)u = 0$$

в случае, когда аргумент $x \to \infty$, а отношение $\frac{a}{x}$ сохраняет постоянное значение. Изложение Дебая получило в дальнейшем широкое распространение, многие авторы стали называть линии наибыстрейшего спуска контурами Дебая и нередко сам метод перевала стали называть методом Дебая наибыстрейшего спуска [11].

Однако все вышеизложенное позволяет нам с полным правом говорить, что создателем общего метода перевала является П. А. Некрасов, который рассматривает метод перевала для общего интеграла, в то время как Дебай оценивает этим методом конкретный и довольно простой интеграл. При этом Некрасов рассматривает общий случай, когда точек перевала несколько и каждая имеет произвольную кратность, в то время как у Дебая одна точка перевала, в которой $u''(z) \neq 0$.

В самом общем случае Некрасов доказывает существование замкнутого контура, проходящего через главные точки перевала по направлениям наибыстрейшего спуска — Дебай это делает для конкретного и простого интеграла, что, конечно, идейно намного проще.

Список литературы

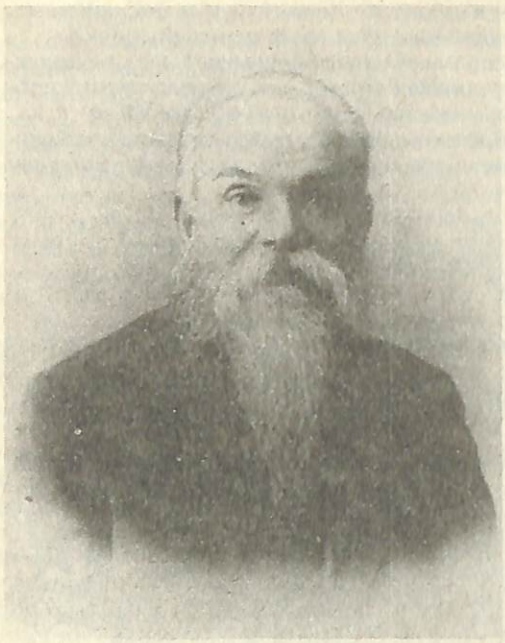
1. *Риман Б.* Сочинения. М.-Л. 1948. С. 187—194.
2. *Debye P.* Naherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grösse Werte des Arguments und un beschränkt veränderliche Werte des Index // Math. Ann. 1909. 67. S. 533—558.
3. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М., 1968.
4. *Seneta E.* The Central Problem and Linear Least Squares in Pre-Revolutionary Russia: The Background // Mathematical Scientist. 1984. № 9. P. 37—77.
5. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М., 1957.
6. *Петрова С. С., Соловьев А. Д.* Об истории создания метода перевала // Историко-математические исследования. Вып. 35 (в печати).
7. *Edwards H. M.* Rieman's zeta function. N. Y. — London, 1974.
8. *Некрасов П. А.* Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел. М., 1886.
9. *Некрасов П. А.* Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел // Математический сборник. 1886. № 12. С. 481—579.
10. Математический сборник. 1899. Т. 20.
11. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения. М., 1966.

С. М. ПОЛОВИНКИН

ПСИХО-АРИТМО-МЕХАНИК
(философские черты портрета П. А. Некрасова)

Павел Алексеевич Некрасов родился 1 февраля 1853 г. Учился сначала в Рязанской духовной семинарии, и это наложило отпечаток на всю его жизнь: до конца дней своих он оставался верующим православным христианином. Будучи 15 лет от роду, обнаруживает исключительное математическое дарование. На вступительном экзамене в Императорский Московский университет на физико-математический факультет он поразил профессора Н. В. Бугаева (1837—1903) и стал верным его учеником и последователем. Некрасов окончил университет в 1878 г. и был оставлен при кафедре чистой математики. В Московском университете Павел Алексеевич прослужил 20 лет: с 1885 по 1905 гг. Преподавал он также в Константиновском

 © С. М. Половинкин



Павел Алексеевич Некрасов.
Фото предоставлено библиотекой механико-математического факультета МГУ.
Публикуется впервые

Межевом институте в Москве и Санкт-Петербургском университете. В 1883 г. последовала защита магистерской, а в 1886 г. — докторской диссертации. В 1886 г. он становится экстраординарным, с 1890 же года — ординарным профессором. С 1893 г. Некрасов — ректор университета, с 1897 г. — Попечитель Московского учебного округа. Он становится активным членом Московского математического общества, в недрах которого и сформировались его математические и философские взгляды: в 1891 г. избирается его вице-президентом, с 1903 по 1905 гг. — президентом. В 1905 г. Некрасов переехал в Санкт-Петербург на службу в Министерство народного просвещения.

Андрей Белый среди карикатур на всех почти своих современников дал такой портрет Некрасова: «Ходил некогда Павел Алексеевич Некрасов, оставленный при университете отцом; в молодости он видом был — вылитый поэт Некрасов, — но с очень болезненным видом: худой, с грудью впалою; к дням профессуры он не поздоровел, но престранно разбрюзг, стал одутловатый и желтый, напоминал какую-то помесь китайца с хунхузом; отец про него говорил, что он некогда был недурным математиком; он поздней пошел в гору как ректор; в эту пору отец стал помалкивать; и „Павел Алексеевич“ не произносилось им ласково.

Другие, бывало:
— А Павел Алексеевич...
Отец встанет, пройдет в кабинет.

В детстве помню его доцентом, туберкулезным и кашляющим, и скорбящим на что-то, и красным весьма; меня брали на елку к Некрасовым; нас посещали Некрасовы; но сколько ни вслушивался, — ни одной яркой мысли, ни взлетного слова: тугое, крутое, весьма хрипловатое и весьма грубоватое слово его» [12, с. 73]. Этот портрет никак не согласуется ни с приводимой здесь фотографией, ни с огромной творческой и общественной активностью Некрасова.

В недрах Московского математического общества вызрела Московская философско-математическая школа, выразителями духа которой были Н. В. Бугаев, П. А. Некрасов, В. Г. Алексеев и П. А. Флоренский. Школа пыталась осуществить «философско-математический синтез» на основе идей аритмологии и монадологии. Н. В. Бугаеву принадлежат основополагающие статьи «Основные начала эволюционной монадологии» (1893) и «Математика и научно-философское миросозерцание» (1898), где выражены базовые идеи школы. П. А. Некрасов — автор фундаментального труда «Московская философско-математическая школа и ее основатели» (1904), где на основе идей Н. В. Бугаева он развил оригинальные взгляды. В. Г. Алексеев свою роль определил скромно: «Лично мне принадлежит лишь систематизация исследований этих мыслителей...»* П. А. Флоренский в своем творчестве, зачастую выходящем далеко за рамки школы, всегда с почтением относился к своим учителям и внес вклад в развитие их идей.

Некрасов писал, что «Логос союза основателей Школы подобен гению Декарта, который отверг и спутанность средневековой схоластики, и диалектически-эмпирический логос Бэкона» [8, с. 10]. Основой «философско-математического синтеза» является математика: «Глубоко проникающий человеческий логос всегда богат тонко развитыми математическими элементами. Поэтому глубоко проникающий логос является не диалектическим только (соответствующим лишь слову) и не диалектико-эмпирическим (соответствующим слову и делу), а математическо-диалектико-эмпирическим» [8, с. 9]. Только таким и может быть «истинный рационализм». Математика должна стать основой объединения всех других дисциплин, и со-

* Цит. по: *Алексеев В. Г.* Математика как основание критики научно-философского мировоззрения. Юрьев, 1903. С. 4.

ответственно, физико-математический факультет — основой объединения всех факультетов в рамках университета. Математика необходима для всех уровней гуманитарного образования, начиная с гимназического [8, с. 234]. «Популярную (диалектическую) школу» должна сменить «точная школа» [10, с. 4]. Религия и беллетристика «необходимы на своем месте, дабы чувством и сердцем привязать человека к Богу. Но классное время есть время решения рассудочных систематических задач в области явления, слова, природы, истории и человеческого общества» [9, с. 103].

Аритмология, в узком смысле слова, — это теория разрывных функций. В широком смысле — идея прерывности, пронизывающая все заново формируемое школой миросозерцание, грядущее на смену аналитическим миросозерцаниям разного рода, в основе которых лежит идея непрерывности. Безраздельное господство математического анализа, который главное внимание уделял аналитическим функциям, сменяется господством «дискретной математики», которую составляют теория чисел, теория множеств, теория функций действительного переменного, где большое внимание уделяется разрывным функциям, теория вероятности, математическая статистика, логистика и т. п. Да и сам математический анализ перестраивался в то время на теоретико-множественной основе. Из этих аритмологических дисциплин Некрасов развивал, главным образом, теорию чисел и теорию вероятностей.

Он полагал, что в мировом порядке существуют две математические регулярности, выражаемые точными математическими законами:

1. Фаталистическая необходимость следования из причины следствия. Она описывается аналитическими функциями и преобладает в астрономии и физике, ее законы описаны Ньютоном.

2. Свободная регулярность, выявляющая «влияние», не фатально ведущее к «последствию». Здесь точными математическими законами аритмологического характера — законами теории вероятностей — может быть описана свобода и получена ее числовая мера [3, с. 23]. Аритмологи считали, что аналитики игнорируют религиозные, этические и эстетические стремления человека. Именно в эти отвергнутые области и пытался внедрить точные методы Некрасов. Он приложил много усилий для внедрения теории вероятностей в социологию, право, финансовую теорию, теорию страхования и т. п. В духе идей аритмологии он пытался создать «символическое исчисление», подобное универсальной математике Декарта и универсальной характеристике Лейбница. Его основами являются: 1) «аналогии», т. е. понятия, обозначенные буквами, которыми оперируют как алгебраическими величинами; 2) условные правила сложения и умножения разного рода, которыми оперируют «машинообразно» [2, с. 124].

Объектами применения точных аритмологических методов школы являлись совокупности монад. В отличие от лейбницевых взаимонепроницаемых монад, у В. Н. Бугаева они вступают во взаимные отношения, которые суть отношения любви. Монады суть живые и одухотворенные единства. Они могут сочетаться в сложные монады. Монадология такого типа, считал Некрасов, «дает термины, удобные для изучения всякой организованности» [8, с. 103]. Особенно удобна монадология для применения математики: «понятие о монаде (особи) является очень удобной формой умозрительного и философского оперирования по отношению ко всевозможным областям миропорядка, в которых приходится применять математику и ее отдел — теорию вероятностей» [3, с. 60]. Некрасов рисует монадологическую картину мироздания: «Наблюдательному уму организованный мир в самом деле представляется как многообразное объединение разных чувствилищ, рассыпаных как живая пыль и живой песок и образующих различные царства природы и духа» [8, с. 104]. Эту «живую пыль» призван исчислить «психо-аритмо-механик», но уже не на основе ньютоновых законов тяготения, а на основе вероятностных законов «мерной свободы»: «Последовательный мораль-арифметик или психо-аритмо-механик в своих теоретико-познавательных определениях живо сознает вероятность как оценку своих возможных колебаний между „да“ и „нет“ и вообще как меру возможности желаемого и ожидаемого» [8, с. 41]. Призван же объединить всё монадическое многообразие живой и неживой природы «живой этический Авторитет, который и есть Истина» [8, с. 65]. В плане социального устроения предстают следующие крайности: либо полная раздробленность индивидов, либо их насильственное аналитическое соединение, например, в крепостном строе. Оптимальным является «аристологократический строй»: «Слепая независимость и слепое объединение здесь заменяются мыслемерною и правомерною свободою, нужною каждому живому элементу разумно дирежируемого хора и подчиненного живой автономнейшей из автономий, могучему Государю-Самодержцу» [8, с. 153]. Самодержавие покоится на союзе не только с Православием, но и с Академией [9, с. 5]. Между Государством и Академией устанавливается аритмологическая «свободосвязь», где Академия обладает автономией, «целесообразной свободой» [9, с. 7]. Роль Академии по отношению к Государству чисто консультативная, окончательное решение принимает Верховная Власть. Принципом же единения государства является Государь, который как бы олицетворяет собой живое персональное монадное единство: «Автономия Государя — суверенного носителя про-

свещенного политического логоса, является святынею, государственным священным кивотом завета, перед которым благоговейно склоняют свои головы все истинно благотворные автономии государства» [8, с. 157]. Государство-личность воплощается в особе Государя. Противящиеся такому единению внутренние разлагающие силы Некрасов изображал «символической гидрой» на гербе Российской Империи, поверженной у ног Св. Георгия Победоносца. Этот «мировой спрут» есть, по его мнению, всемирный капитал [2, с. 532].

Всякий народ «должен развивать свою национальную идеально-реальную благотворную свободу» [3, с. 124]. Препятствием в данном случае является отвлеченная, но увлекательная космополитическая идея, пытающаяся смешать всех людей в одно управляемое стадо: «Эта идея увлекательна, но практически она часто служит средством, чтобы, обольстив ею, без выстрела овладеть пределами чужой свободы. При этом позади отвлеченного космополитизма идет реальный материалистический космополитизм в форме чудовищного по притязательности капитала» [3, с. 124]. Аналитическому космополитическому единению Некрасов противопоставляет аритмологическое «идеал-реальное братство племен» [3, с. 124].

Мировоззрение школы носило действенный характер. Некрасов полагал, что «каждый человек есть по природе теоретический и практический статистик и разведчик» [8, с. 42]. «Плотники государственных дел» строят Государство [9, с. 13]. Техника государственного строительства есть «инженерное искусство»: «Государство вдохновляется тою Гносеологией, обращаясь в воплощенного коллективного инженера социального строительства, — социальинженера» [8, с. 100]. Таким «социальинженером» был и сам Некрасов.

Жизнь его после революции описана С. Урицким в кратких словах некролога: «Наступает революция. П. А. решает весь свой талант, все свои богатейшие знания бросить на служение пролетариату. Он определенно стремится воспринять марксистскую систему. Он дал еще ряд новых монографий, в коих методы математики применяет для анализа общественных явлений.

Ряд коммунистов-математиков решил взять на себя задачу окончательного освобождения трудов П. А. Некрасова от метафизической оболочки, чтобы сделать понятной всю их ценность.

За несколько дней до смерти, захворав воспалением легких, уезжая в больницу, П. А. Некрасов успел написать мне свою последнюю записку, в коей он просит меня принять участие в образовании ученого марксистского кружка для изучения и использования его трудов.

Свое письмо П. А. Некрасов заканчивает словами: „Прошу Вас принять все меры, чтобы раз открытые математические истины, ценные с точки зрения марксизма, не затерялись с моей смертью, уже недалекой".

Эту предсмертную просьбу мы должны выполнить» [13, с. 7].

Умер Некрасов 20 декабря 1924 г.

Что здесь правда, а что вымысел, установить сейчас трудно, однако просьбу Некрасова не затерять его математических, добавим, и философских, истин следует исполнить.

Избранная библиография: философские труды П. А. Некрасова и литература о нем

1. *Некрасов П. А.* Теория вероятностей: Лекции. М., 1896.
2. *Некрасов П. А.* Теория вероятностей. Изд. 2-е, дополненное статистической теорией взаимоотношений и элементами Номографии. СПб., 1912.
3. *Некрасов П. А.* Философия и логика науки о массовых проявлениях человеческой деятельности (Пересмотр оснований социальной физики Кетле). М., 1902.
4. *Тихомиров П. В.* Рецензия на книгу: *Некрасов П. А.* Философия и логика науки о массовых проявлениях человеческой деятельности (Пересмотр оснований социальной физики Кетле). М., 1902 // Богословский Вестник. 1903. Т. 1.
5. *Некрасов П. А.* Философские и логические основания социальной физики. Тезисы к сочинению П. А. Некрасова: Философия и логика науки о массовых проявлениях человеческой деятельности (Пересмотр оснований социальной физики Кетле). М., 1902. — Речь П. А. Некрасова о тезисах и о задачах своего сочинения. — Возражения на тезисы П. А. Некрасова. Замечание кн. Д. Н. Церетелева (Теория вероятности и свобода воли). — Замечание П. В. Преображенского. — Возражения В. А. Гольцева. — Замечание Г. В. Аппельрота. — Возражение К. А. Андреева. — Замечание П. Соколова. — Замечание профессора Б. К. Млодзеевского. — Ответы П. А. Некрасова на замечания и возражения относительно философских и логических оснований социальной физики // Вопросы философии и психологии. 1903. № 68.
6. *Гольцев В. А.* Возражение П. А. Некрасову // Вопросы философии и психологии. 1903. № 69.
7. *Некрасов П. А.* Логика мудрых людей и мораль (ответ В. А. Гольцову) // Вопросы философии и психологии. 1903. № 70.
8. *Некрасов П. А.* Московская философско-математическая школа и ее основатели (Речь, произнесенная на заседании Московского Математического Общества 16 марта 1904 г., в память Николая Васильевича Бугаева). М., 1904.

9. *Некрасов П. А.* Государство и Академия. Синтез (сложение) авторитетных суждений добросовестного меньшинства с мнениями моральных сил доблестного большинства. Элементы политических совещательных и решающих процессов в применении к законопроектированию и систематическому решению государственных и общественных задач. Избирательная (вообще) и платная (в частности) система. Русский естественный и исторических авторитетный путь государственной реформы. Школа, народообразовательная система и академическая автономия высших учебных заведений. М., 1905.
10. *Некрасов П. А.* К обществу, родителям и педагогам. Основы общественных и естественных наук в средней школе. Доклад, прочитанный в родительском комитете одной из гимназий. СПб., 1906.
11. *Некрасов П. А.* Вера, знание, опыт. Основной метод общественных и естественных наук (Гносеологический и номографический очерк). СПб., 1912.
12. *Белый Андрей.* На рубеже двух столетий. М., 1989.
13. *Урицкий С.* Проф. Павел Алексеевич Некрасов // Известия. 1924. 24 декабря.
14. *Слугинов С. П.* П. А. Некрасов // Труды математического семинария Пермского университета. Пермь, 1927. Т. 1.
15. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 г. М., 1968.
16. *Половинкин С. Н.* Московская философско-математическая школа // Общественные науки в СССР. Серия 3. Философия. 1991. № 2.